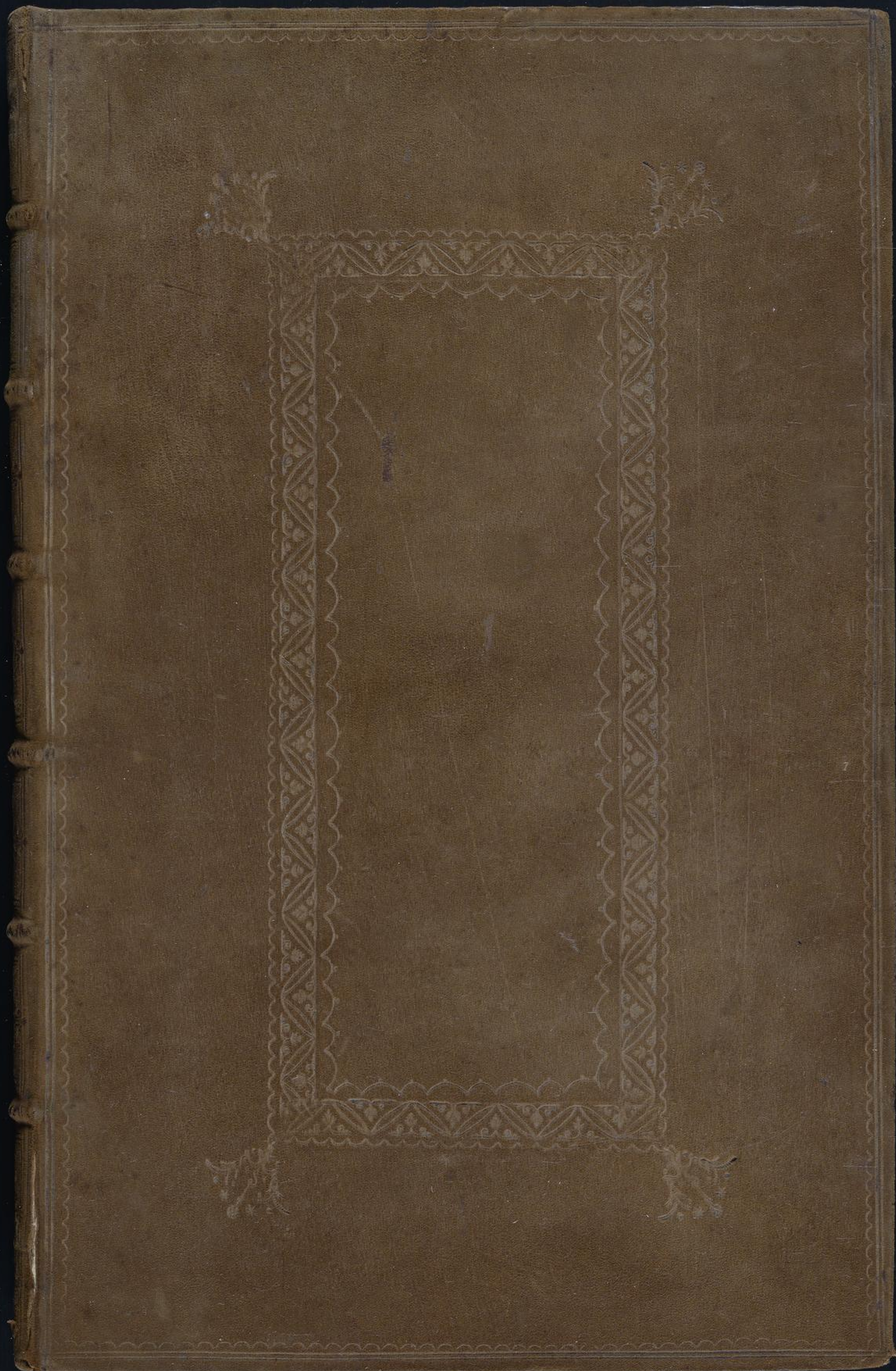



LJS
BIBLIOTHECA
SCHOENBERGENSIS
199
SCHOENBERG DATABASE
OF MANUSCRIPTS
LJS

Artis Analyticæ Specimina
sive
Geometria Analytica.

Auctore

Isaaco Newtono,

Equite Aurato.

Animadvertenti plerosq; Geometras, posthabita fere veterum Synthetica methodo, Analyticæ excolendæ plurimum incumbere, et ejus ope tot tantasq; difficultates superasse ut penè omnia, extra Curvarum Quadraturas et similia quædam nondum penitus enodata, videantur exhausisse: placuit sequentia quibus Campi Analytici terminos expandere, juxta et Curvarum Doctrinam promovere possem in gratiam discentium breviter compingere.

Cùm in Numeris et Speciebus Operationes computandi persimiles sint neq; differe videantur nisi in Characteribus quibus quantitates in istis definitè in his indefinitè designantur: demiror quod Doctrinam de Numeris Decimalibus nuper inventam (si Quadraturam Hyperbolæ per N. Mercatorem demas) nemini in mentem venerit Speciebus itidem accommodare, præsertim cùm ad præclariora viam aperitat. Hæc autem de Speciebus Doctrina, cùm eodem modo ad Algebram relata sit ac Doctrina Decimalium Numerorum ad vulgarem Arithmeticam; Operationes Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio et Extractio Radicum exinde addisci possunt, modò Lector utriusq; et Arithmeticæ et Algebræ vulgaris peritus fuerit, et noverit correspondentiam inter Decimales Numeros ac Terminos Algebraicos in infinitum continuatos; scilicet quod singulis Numerorum locis proportione Decimali dextrorsum perpetuò decrescentibus correspondent singuli Specierum termini secundum Seriem dimensionem Numeratorum vel Denominatorum uniformi progressione in infinitum continuatam (prout factum in sequentibus) ordinatis. Et quemadmodum commoditas Decimalium in eo consistit ut Fractiones omnes & Radicales in eos reductæ quodammodo Naturam Integrorum induant. Sic etiam infinitarum Specierum commoditas est quod per eas

abstra=

abstrusiorum Terminorum genera (quales sunt Fractiones a compositis Quantitatibus Denominatæ, compositarum Radices, et Radices affectarum Æquationum) possunt ad Simplicium genus reduci, ad infinitas nempè Fractionum Series Numeratores ac Denominatores Simplices habentium, in quibus nullæ sunt aliorum difficultates propemodum insuperabiles. Imprimis itaq3 reductiones aliarum quantitatum ad hujusmodi Terminos & Methodos computandi minus obvias ostendam, dein hanc Analysin ad Solutiones Problematum applicabo.

Reductiones per Divisionem et Extractionem Radicum e sequentibus Exemplis cùm similibus operandi modis in Arithmetica Decimali et Speciosa collatis elucescet.

Exempla Reductionum per Divisionem.

Proposita $\frac{aa}{b+x}$ divide aa per $b+x$ ad hunc modum.

$$b+x)\,aa+0\left(\frac{aa}{b}-\frac{aax}{b^2}+\frac{aax^2}{b^3}-\frac{aax^4}{b^4}+\frac{aax^5}{b^5}\ \&c\right.$$

$$\begin{array}{l} aa+\frac{aax}{b} \\ \hline 0-\frac{aax}{b}+0 \\ -\frac{aax}{b}-\frac{aax^2}{b^2} \\ \hline 0+\frac{a^2x^2}{b^2}+0 \\ +\frac{a^2x^2}{b^2}+\frac{a^2x^3}{b^3} \\ \hline 0-\frac{a^2x^3}{b^3}+0 \\ -\frac{a^2x^3}{b^3}-\frac{a^2x^4}{b^4} \\ \hline 0+\frac{a^2x^4}{b^4}\ \&c. \end{array}$$

Et prodit $\frac{aa}{b}-\frac{aax}{b^2}+\frac{aax^2}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}$ &c quæ Series in infinitum continuata tantum valet ac $\frac{aa}{b+x}$. Vel posito x primo Divisoris termino, hoc modo $x+b)\,aa\,($ prodibit $\frac{aa}{x}-\frac{aab}{x^2}+\frac{aab^2}{x^3}-\frac{aab^3}{x^4}$ &c.

Ad

Ad eundem modum Fractio $\frac{1}{1+xx}$ reducitur ad $1-x^2+x^4-x^6+x^8$ &c vel ad $x^{-2}-x^{-4}+x^{-6}-x^{-8}$ &c.

Et Fractio $\dfrac{2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}-3x}$ ad $2x^{\frac{1}{2}}-2x+7x^{\frac{3}{2}}-13x^2+34x^{\frac{5}{2}}$ &c.

Ubi obiter notandum est quod usurpo $x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, x^{-4}$ &c pro $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}$; et $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{3}{2}}, x^{\frac{5}{2}}, x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{2}{3}}$ &c pro $\sqrt{x}, \sqrt{x^3}, \sqrt{x^5}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{x^2}$; et $x^{-\frac{1}{2}}, x^{-\frac{2}{3}}, x^{-\frac{1}{4}}$ &c pro $\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, Idq ob Analogiam rei quæ deprehendi potest ex hujusmodi Geometricis Progressionibus $x^3, x^{\frac{5}{2}}, x^2, x^{\frac{3}{2}}, x, x^{\frac{1}{2}}, x^0$ (sive 1.) $x^{-\frac{1}{2}}, x^{-1}, x^{-\frac{3}{2}}, x^{-2}$ &c.

Ad hunc modum pro $\frac{aa}{x}-\frac{aab}{x^2}+\frac{aab^2}{x^3}$ &c scribi potest $aax^{-1}-aabx^{-2}+aab^2x^{-3}$ &c.

Et sic vice $\sqrt{aa-xx}$ scribi potest $\overline{aa-xx}|^{\frac{1}{2}}$; Et $\overline{aa-xx}|^2$ vice Quadrati ex $aa-xx$; Et $\overline{\frac{abb-y^3}{by+yy}}|^{\frac{1}{3}}$ vice $\sqrt[3]{\frac{ab^2-y^3}{by+yy}}$. Et sic in aliis.

Unde merito potestates distingui possunt in Affirmativas et Negativas, Integras et Fractas.

Exempla Reductionum per Extractionem Radicum.

Proposito $aa+xx$, Radicam ejus ut sequitur extrahes.

$$aa+xx\left(a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}+\frac{7x^{10}}{2568a^9}-\frac{21x^{12}}{1024a^{11}}\ \text{\&c.}\right.$$

$$\begin{array}{l}
\underline{aa} \\
0+xx \\
\underline{xx+\frac{x^4}{4a^2}} \\
-\frac{x^4}{4a^2} \\
\underline{-\frac{x^4}{4a^2}-\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{64a^6}} \\
+\frac{x^6}{8a^4}-\frac{x^8}{64a^6} \\
\underline{\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{16a^6}-\frac{x^{10}}{64a^8}+\frac{x^{12}}{256a^{10}}} \\
-\frac{5x^8}{64a^6}+\frac{x^{10}}{64a^8}-\frac{x^{12}}{256a^{10}}\ \text{\&c} \\
\underline{-\frac{5x^8}{64a^6}-\frac{5x^{10}}{128a^8}+\frac{5x^{12}}{512a^{10}}} \\
\frac{7x^{10}}{128a^8}-\frac{7x^{12}}{512a^{10}} \\
\underline{\frac{7x^{10}}{128a^8}+\frac{7x^{12}}{256a^{10}}} \\
-\frac{21x^{12}}{512a^{10}}
\end{array}$$

Ut prodit $a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}$ &c. Ubi notandum quod circa finem operis eos omnes terminos negligo quorum Dimensiones transcenderent Dimensiones ultimi Termini ad quem capio Quotientem solummodò produci puta $\frac{x^{12}}{a^{11}}$.

Potest etiam ordo Terminorum inverti ad hunc modum $xx+aa$ et Radix erit $x+\frac{aa}{2x}-\frac{a^4}{8x^3}+\frac{a^6}{16x^5}$ &c.

Sic ex $aa-xx$, Radix est $a-\frac{xx}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}$ &c.

Ut ex $x-xx$ est $x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$ &c.

Ut ex $aa+bx-xx$ est $a+\frac{bx}{2a}-\frac{xx}{2a}-\frac{b^2x^2}{8a^3}$ &c.

Et ex $\frac{1+axx}{1-bxx}$ est $\frac{1+\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{8}a^2x^4+\frac{1}{16}a^3x^6}{1-\frac{1}{2}bx^2-\frac{1}{8}b^2x^4-\frac{1}{16}a^3x^6}$ &c. factaque insuper

Divisione fit
$$1\begin{array}{l}+\frac{1}{2}b\\+\frac{1}{2}a\end{array}x^2\begin{array}{l}+\frac{3}{8}bb\\+\frac{1}{4}ab\\-\frac{1}{8}aa\end{array}x^4\begin{array}{l}+\frac{5}{16}b^3\\+\frac{3}{16}ab^2\\-\frac{1}{16}a^2b\\+\frac{1}{16}a^3\end{array}x^6, \text{ \&c.}$$

Operationes vero per debitam præparationem non rarò abbreviari possunt; Ut in allato Exemplo ad extrahendum $\sqrt{\frac{1+axx}{1-bxx}}$, si non eadem fuisset Numeratoris ac Denominatoris forma, utrumque Multiplicassem per $\sqrt{1-bxx}$ & sic prodiisset $\frac{\sqrt{1\pm 8x^2-abx^4}}{1-bxx}$ et reliquum opus perficeretur extrahendo Radicem Numeratoris tantùm ac dividendo per Denominatorem.

Ex hisce credo manifestum est quo pacto Radices aliæ possunt extrahi et quælibet compositæ Quantitates (quibuscunque Radicibus vel Denominatoribus perplexæ ut hic videre est $x^3+\frac{\sqrt{x-\sqrt{1-xx}}}{\sqrt[3]{axx+x^3}}-\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^5-x^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt[3]{x+xx}-\sqrt{2x-x^{\frac{2}{3}}}}$.) in Series infinitas Simplicium Terminorum reduci.

De

De Affectarum Æquationum Reductione.

Propositis verò affectis Æquationibus, modus quo Radices earum ad hujusmodi Series possint obnixiùs explicari debet, idq cùm earum Doctrina quam hactenus in Numeris exposuerunt Mathematici, per ambages (superfluis etiam Operationibus adhibitis) tradatur ut in Specimen Operis in Speciebus non debeat adhiberi. Inprimis itaq Numerosam affectarum Æquationum Resolutionem compendiosè tradam dein Speciosam similiter explicabo.

Proponatur Æquatio $y^3-2y-5=0$ resolvenda; et sit 2 Numerus utcunq inventus qui minùs quàm decimâ sui parte differt a Radice quæsita. Tum pono $2+p=y$ et pro y substituo $2+p$ in Æquationem, et inde nova prodit $p^3+6p^2+10p-1=0$ cujus Radix p exquirenda est ut Quotienti addatur. Nempe (neglecti p^3+6p^2 ob parvitatem) $10p-1=0$ sive $p=0{,}1$, ad veritatem proxime accedet. Scribo itaq 0,1 in Quotiente, & suppono $0{,}1+q=p$ et hunc ejus fictitium valorem ut ante substituo et prodit $q^3+6{,}3q^2+11{,}23q+0{,}061=0$. Et cùm $11{,}23q+0{,}061=0$ veritatem appropinq sive ferè sit $q=-0{,}0054$ (dividendo nempe 0,061 per 11.23 donec tot eliciantur figuræ quot loca primis figuris hujus et principalis quotientis exclusivè intercedunt, quemadmodum hic duo sunt inter 2, & 0,005) scribo $-0{,}0054$ in inferiori parte quotientis siquidem negativa sit, et supponens $-0{,}0054+r=q$, hunc ut priùs substituo. Et sic operationem ad placitum produco, pro more subjecti Diagrammatis.

	$+2.10000000$ -0.00544852 2.09455148
$2+p=y$ y^3 $-2y$ -5	$+8+12p+6p^2+p^3$ $-4-2p$ -5
Summa	$-1+10p+6p^2+p^3$
$0{,}1+q=p.$ $+p^3$ $+6p^2$ $+10p$ -1	$+0{,}001+0{,}03q+0{,}3q^2+q^3$ $+0{,}06+1{,}2\quad+6$ $+1,\quad+10,$ -1
Summa	$0{,}061+11{,}23q+6{,}3q^2+q^3$
$-0{,}0054+r=q.$ $+q^3$ $+6{,}3q^2$ $+11{,}23q$ $+0{,}061$	$-0{,}000000157464\quad+0{,}00008748r\quad-0{,}0162r^2+r^3$ $+0{,}000183708\quad-0{,}06804\quad+6{,}3$ $-0{,}060642\quad+11{,}23$ $+0{,}061$
Summa	$+0{,}0005416\quad+11{,}162r$
$-0{,}00004852+s=r$	

Opus verò sub fine (præsertim in Æquationibus plurium Dimensionum) hac Methodo multùm abbreviabitur. Determinato quousq velis Radicam extrahi tot loca post primam Figuram coefficientis penultimi termini Æquationum in dextra parte Diagrammatis resul=

resultantium adnumera, quot supersunt Loca in Quotiente complenda, & subsequentes Decimales neglige. In ultimo verò termino Decimales post tot plura loca neglige quot in Quotiente complentur loca Decimalia. Inq antepenultimo termino neglige omnes post tot pauciora Loca. Et sic deinceps Arithmeticè progrediendo per intervallum istud locorum, sive, quod perinde est, tot figuras passim elidendo quot in penultimo termino, modò depressissima earum loca sint in Arithmeticâ progressione juxta Seriem terminorum, aut Circulis compleri subintelligantur ubi res aliter eveniat. Sic in Exemplo jam posito, si cupiam ut Quotiens ad octavum tantum Decimalem locum compleatur; inter substituendum 00054 + r pro q, ubi quatuor loca Decimalia in quotiente complentur, ac totidem supersunt complenda, potui Figuras in inferioribus quinq loco omisisse quas ea propter lineolâ transversim notavi; imo primum terminum r^3, etsi coefficientem 99999 habuisset, potui tamen penitus omisisse. Expunctis itaq figuris istis pro subsequente operatione prodit summa 0,0005417+11,1627r; quæ per Divisionem ad usq præscriptam terminum peractum dat −0,00004852 pro r; quod quotientem ad optatam periodum complet.

Deniq negativam partem quotientis ab Affirmativâ subduco, et oritur 2,09455148 Quotiens absoluta.

Præterea notandum est quod sub initio operis si dubitarem an 0,1=p ad veritatem satis accederet, vice 10p−1=0 finxissem $6p^2+10p-1=0$ et ejus Radicis nihilo propioris primam figuram in Quotiente scripsissem. Et hoc modo secundam vel etiam tertiam Quotientis Figuram explorare convenit ubi in Æquatione secundaria circa quam versaris, Quadratum coefficientes penultimi termini non sit decies major quàm factas ex ultimo termino ducto in coefficientem termini antepenultimi. Quinimo laborem plerumq minues, præsertim in Æquationibus plurimarum Dimensionum, si figuras omnes quotienti addendas hoc modo (id est, extrahendo minorem Radicum ex tribus ultimis terminis Æquationis ejus Secundariæ) quæras. Sic enim Figuras duplo plures in quotiente quâlibet vice lucraberis.

His in Numeris sic ostensis, consimiles operationes in Speciebus explicandæ restant, de quibus convenit sequentia prænoscere.

1. Quod

1. Quod e Speciebus coefficientibus aliqua præ reliquis (si sint plures) insigniendа sit, ea nempe quæ est, aut fingi potest esse omnium longè minima vel maxima vel datæ quantitate vicinissima: Cujus rei causa est, ut ob ejus Dimensiones in Numeratoribus vel Denominatoribus terminorum quotientis perpetim auctas, illi termini continuò minores et inde quotiens Radici propinquior evadat, sicut ante de Specie x in Exemplis Reductionum per Divisionem & Extractionem Radicum manifestum esse potest. Pro isthâc verô Specie in sequentibus ut plurimùm usurpabo etiam x vel z, quemadmodum et y, p, q, r, s &c pro Specie Radicali extrahenda.

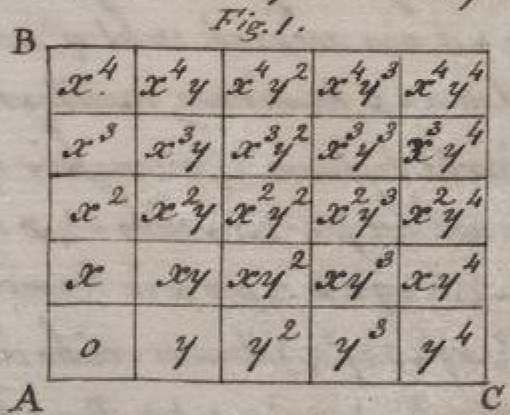
2. Siquando fractiones complexæ vel Surdæ Quantitates in Æquatione propositâ vel post in operatione occurrant, tolli debent per Methodos Analyseis satis notas. Quemadmodum si habeatur $y^3 + \frac{bb}{b-x}y^2 - x^3 = 0$ multiplico per $b-x$, et ex facto $by^3 - xy^3 + b^2y^2 - bx^3 + x^4 = 0$ valorem y elicio. Vel possum fingere $y \times \overline{b-x} = v$, et sic scribendo $\frac{v}{b-x}$ pro y, orietur $v^3 + b^2y^2 - b^2x^3 + 2bx^4 - x^5 = 0$ dein extractâ radice v, divido quotientem per $b-x$ ut obtineatur valor y. Item si proponatur $y^3 - xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{3}} = 0$, fingo $y^{\frac{1}{2}} = v$, et $x^{\frac{1}{3}} = z$, et sic scribendo vv pro y, et z^3 pro x, oritur $v^6 - z^3v + z^4 = 0$; qua Æquatione resolutâ restituo y et x. scilicet radix invenietur $v = z + z^3 + 6z^5$ &c & restitutis y & x, oritur $y^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}} + x + 6x^{\frac{5}{3}}$ &c; et quadrando $y = x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}} + 13x^2$ &c.

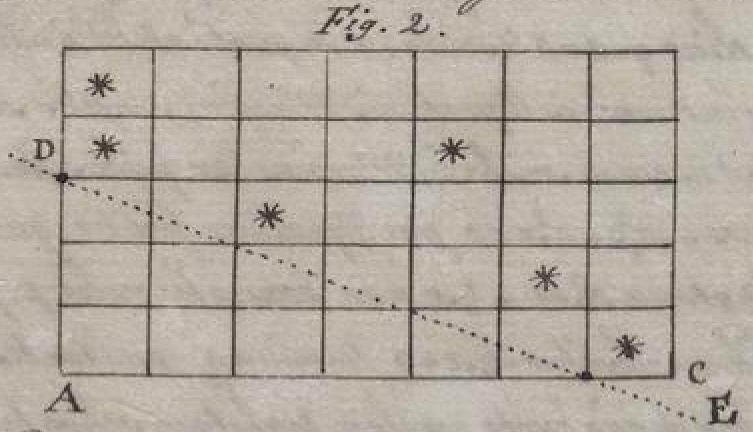
Ad eundem modum Siquæ sint negativæ dimensiones ipsorum x & y, tollo multiplicando per easdem x & y. Sic habito $x^3 + 3x^2y^{-1} - 2x^{-1} - 16y^{-3} = 0$ multiplico per x et y^3, oriturque $x^4y^3 + 3x^3y^2 - 2y^3 - 16 = 0$. Et habito $x = \frac{aa}{y} - \frac{2a^3}{y^2} + \frac{3a^4}{y^3}$ duco in y^3 et oritur $xy^3 = y^2 - 2y + 3$. Et sic de cæteris.

3. Æquatione sic præparatâ, opus ab inventione primi termini quotientis initium sumit, de quâ ut et consimili subsequentium terminorum inventione hæc esto regula generalis cùm Species indefinita (x vel z) parva esse fingitur, ad quem casum cæteri duo casus sunt reducibiles.

E terminis in quibus Species Radicalis (y, p, q vel r &c.) non reperitur selige depressissimum respectu dimensionum indefinitæ Speciei (x vel z &c) dein alium terminum in quo sit illa Species Radicalis selige, talem nempe ut progressio dimensionum utriusque præfatæ Speciei a termino prius assumpto ad hunc terminum continuata, quàm maximè potest descendat, vel minimè ascendat. Et siqui sint alij termini quorum dimensiones cum hâc progressione ad arbitrium continuatâ conveniant, eos etiam selige. Denique ex his selectis terminis tanquam nihilo, æqualibus quære valorem dictæ speciei radicalis et Quotienti appone.

Cæterùm ut hæc regula magis elucescat, placuit insuper ope sequentis Diagrammatis exponere. Descripto angulo recto BAC, latera ejus BA, AC, divide in partes æquales, et inde normales erigo distribuentes





angulare spatium in æqualia quadrata vel parallelogramma, quæ concipio denomi-

denominata esse a Dimensionibus Specierum x & y, prout vides in fig. 1. inscriptas. Deinde cùm æquatio aliqua proponitur parallelogramma singulis ejus terminis correspondentia insignio notâ aliquâ. Et regulâ ad duo vel forte plura, ex insignitis parallelogrammis applicatâ quorum unum sit humillimum in Columnâ sinistra juxta AB, et alia ad regulam dextrorsum sita, cæteraq; omnia non contingentia regulam supra eam jaceant: Seligo terminos Æquationis per parallelogramma contingentia regulam designatos, et inde quæro quantitatem quotienti addendam.

Sic ad extrahendam radicem y. ex $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$; parallelogramma hujus terminis respondentia signo nota aliqua * ut vides in Schem. 2. Dein applico regulam DE. ad inferiorem e locis signatis in sinistra Columna, eamq; ab inferioribus ad superiora dextrorsum gyrare facio donec alium similiter vel forte plura è reliquis signatis locis cœperit attingere; videóq; loca sic attacta esse x^3, x^2y^2, & y^6. E terminis itaq; $y^6 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3$ tanquam nihilo æqualibus (et insuper si placet reductis ad $v^6 - 7v^2 + 6 = 0$, ponendo $y = v\sqrt{ax}$) quæro valorem y, et invenio quadruplicem $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$ $+\sqrt{2ax}$, & $-\sqrt{2ax}$, quorum quemlibet pro initiò quotientis accipere liceat prout e radicibus quempiam extrahere decretum est.

Sic ex $y^5 - by^2 + 9bx^2 - x^3 = 0$, seligo $-by^2 + 9bx^2$, et inde obtineo $+3x$ pro initiali termino quotientis.

Et ex $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$ Seligo $y^3 + a^2y - 2a^3$ et radicum ejus $+a$ scribo in quotiente.

Et ex $x^2y^5 - 3c^4xy^2 - c^5x^2 + c^7 = 0$. Seligo $x^2y^5 + c^7$, quod exhibet $\sqrt[5]{\frac{c^7}{xx}}$ pro initio quotientis. Et sic de cæteris.

Cæterùm invento hoc termino, si is contingat esse negativæ potestatis, Æquationem per eandem indefinitæ Speciei potestatem deprimo eo ut non opus sit inter solvendum deprimere, et insuper ut regula de superfluis terminis elidendis mox tradenda aptè possit adhiberi. Sic proposito $8z^6y^3 + az^6y^2 - 27a^9 = 0$ cujus quotiens exordiri debet a $\frac{3a^3}{zz}$, deprimo per zz, ut fiat $8z^4y^3 + az^4y^2 - 27a^9z^{-2} = 0$, antequam Solutionem ineo.

Subsequentes quotientum termini eadem methodo ex Æquationibus Secundarijs inter operandum prodeuntibus eruuntur, sed ut plurimum leviori curâ. Res enim peragi solet dividendo depressissimum e terminis cum indefinitè parva Specie (x, xx, x^3 &c) absq; Specie radicali (p, q, r, &c) affectis, per quantitatem quâcum Species illa radicalis unius tantùm dimensionis absq; alterâ indefinitè Specie afficitur, et exitum scribendo in quotiente. Sic in Exemplo sequente termini $\frac{x}{4}$, $\frac{xx}{64a}$, $\frac{131x^3}{512a^2}$, &c. eliciuntur dividendo a^2x, $\frac{1}{16}axx$, $\frac{131}{128}x^3$, &c per $4aa$.

His præmissis restat ut praxin resolutionis exhibeam. Sit itaq; $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, Æquatio resolvenda; et ex ejus terminis $y^3 + aay - 2a^3 = 0$, Æquatione fictitia juxta tertium e præmissis elicio $y - a = 0$ & scribo $+a$ in quotiente. Deinde cùm $+a$ non accurate valet y, pono $a + p = y$ et pro y in terminis Æquationis Margine scriptis substituo $a + p$, terminesq; resultantes ($p^3 + 3ap^2 + axp$ &c) rursum scribo in Margine, ex quibus iterum juxta tertium e præmissis excerpo terminos $+4a^2p + a^2x = 0$ pro Æquatione fictitiâ, quæ cùm exhibet $p = -\frac{1}{4}x$, scribo $-\frac{1}{4}x$ in quotiente. Præterea cùm $-\frac{1}{4}x$ non accuratè valet p, pono $-\frac{1}{4}x + q = p$, & pro p in terminis marginalibus substituo $-\frac{1}{4}x + q$, terminosq; resultantes ($q^3 - \frac{3}{4}xq^2 + 3aq^2$ &c) iterum scribo in Margine ex quibus denuò juxta regulam præfatam seligo terminos $4a^2q - \frac{1}{16}ax^2 = 0$ pro Æquatione fictitia quæ cùm exhibeat $q = \frac{xx}{64a}$, scribo $+\frac{xx}{64a}$ in Quotiente.

Porrò cùm $\frac{xx}{64a}$ non accuratè valeat q, pono $\frac{xx}{64a}+r=q$, & pro q in terminis Marginalibus substituo $\frac{xx}{64a}+r$, & sic opus ad placitum produco prout indicat subjectum Diagramma.

		$(a-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{64a}+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}$ &c
$+a+p=y$	$+y^3$	$+a^3+3a^2p+3ap^2+p^3$
	$+axy$	$+a^2x+axp$
	$+a^2y$	$+a^3+a^2p$
	$-x^3$	$-x^3$
	$-2a^3$	$-2a^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p$	$+p^3$	$-\frac{1}{64}x^3+\frac{3}{16}x^2q$ * $-\frac{3}{4}xq^2+q^3$
	$+3ap^2$	$+\frac{3}{16}ax^2-\frac{3}{2}axq \quad +3aq^2$
	$+axp$	$-\frac{1}{4}ax^2+axq$
	$+4a^2p$	$-a^2x \cdot +4a^2q$
	$+a^2x$	$+a^2x$
	$-x^3$	$-x^3$
$+\frac{x^2}{64a}+r=q$	$+q^3$	*
	$-\frac{3}{4}xq^2$	*
	$+3aq^2$	$+\frac{3x^4}{4096a}$ * $+\frac{3}{32}x^2r+3ar^2$
	$+\frac{3}{16}x^2q$	$+\frac{3x^4}{1024a}$ * $+\frac{3}{16}x^2r$
	$-\frac{1}{2}axq$	$-\frac{1}{128}x^3-\frac{1}{2}axr$
	$+4a^2q$	$+\frac{1}{16}ax^2+4a^2r$
	$\frac{65}{64}x^3$	$-\frac{65}{64}x^3$
	$-\frac{1}{16}ax^2$	$-\frac{1}{16}ax^2$
$+4a^2-\frac{1}{2}ax)+\frac{131}{128}x^3-\frac{15x^4}{4096a}\left(+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}\right.$		

Quod si Quotientem ad certam usq; periodum produci cupiam ut x nempe in ultimo ejus termino ultra datum dimensionum numerum non ascendat terminos inter substituendum semper omitto quos nulli deinceps usui fore prævideam. Cujus rei regula esto, quod post primum terminum ex qualibet quantitate in Margine collaterali resultantem non addantur plures dextrorsum, quàm istius primò resultantis termini dimensio a periodica sive maxima dimensione quotientis deficit gradibus. Ut in hoc Exemplo si cupiam ut Quotiens (sive x in Quotiente) ad quatuor tantùm Dimensiones ascendat, omitto omnes terminos post x^4, & post x^3 pono unicum tantùm. Terminos itaq; post notam * delendos esse concipe: Et opere sic continuato donec ultimè ad terminos $\left(\frac{15x^4}{4096a}-\frac{131}{128}x^3+4a^2r-\frac{1}{2}axr\right)$ deveniatur in quibus (p, q, r, vel s &c) residuum Radicis extrahendæ sit unicæ tantùm Dimensionis; tot terminos $\left(+\frac{131x^3}{512aa}+\frac{509x^4}{16384a^3}\right)$ per divisionem elicies, quot ad complendum quotientem deesse videbis. Atq; ita tandem obtinebitur $y=a-\frac{1}{4}x+\frac{xx}{64a}+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}$.

Plenioris illustrationis gratia dedi aliud Exemplum resolvendo $\frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + y - z = 0$; Ubi proponitur inventio quotientis ad quintam tantum Dimensionem, terminiq; superflui post notam (&c) negliguntur. See Ex 1. in p.

Atq; ita si cupiam Aequationem $\frac{63y^{11}}{2816} + \frac{35}{1152}y^9 + \frac{5}{112}y^7 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{1}{6}y^3 + y - z = 0$, ad usq; nonam tantum Dimensionem quotientis resolvi, ante opus initum negligo terminum $\frac{63}{2816}y^{11}$, deinde inter operandum negligo etiam omnes terminos post z^9, post z^7 pono unicum, ac duos tantum post z^5, eò quod percipio quotientem ubiq; per gradus binarum unitatum (hoc modo z, z^3, z^5, &c) debere ascendere: Tandemq; prodit $y = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$.

Et hinc patet artificium quo Aequationes in infinitum affectae, vel utcunq; multis numerove infinitis terminis constanter possunt solvi. Scilicet omnes termini ante opus initum debent negligi in quibus dimensio Speciei indefinitè parvae non affectae cum radicali Specie transcendit maximam dimensionem in quotiente desiderantem, vel ex quibus, substituendo pro radicali Specie primum terminum quotientis ope tessellatae tabulae inventum, non nisi ejusmodi transcendentes termini possunt emergere. Sic in Exemplo novissimo terminos omnes supra y^9 quamvis infinitè progrederentur, omisissam. Et sic in hac Aequatione

$$0 = \begin{cases} -8 + z^2 - 4z^4 + 9z^6 - 16z^8 \text{ \&c} \\ +y \text{ in } z^2 - 2z^4 + 3z^6 - 4z^8 \text{ \&c} \\ -y^2 \text{ in } z^2 - z^4 + z^6 - z^8 \text{ \&c.} \\ +y^3 \text{ in } z^2 - \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{3}z^6 - \frac{1}{4}z^8 \text{ \&c.} \end{cases}$$

ut radix Cubica ad quatuor tantum dimensiones ipsius z extrahatur mitto omnes in infinitum terminos post $+y^3$ in $z^2 - \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{3}z^6$, & post $-y^2$ in $z^2 - z^4 + z^6$, & post $+y$ in $z^2 - 2z^4$, & post $-8 + z^2 - 4z^4$. Et hanc tantum Aequationem $\frac{1}{3}z^6y^3 - \frac{1}{2}z^4y^3 + z^2y^3 - z^6y^2 + z^4y^2 - z^2y^2 - 2z^4y + z^2y - 4z^4 + z^2 - 8 = 0$ resolvendam sumo, Siquidem $2z^{-\frac{2}{3}}$ (primus nempe quotientis terminus) pro y in reliquâ Aequatione per $z^{\frac{2}{3}}$ depressâ substitutus, dat plures ubiq; quàm quatuor dimensiones.

Quae

Quæ de altioribus Æquationibus dixi, ad Quadraticas etiam applicari possunt. Quemadmodum si hujus

$$0 = \begin{cases} -yy \\ -y \text{ in } a + x + \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^4}{a^3} \text{ \&c} \\ +\frac{x^4}{4a^2} \end{cases}$$

radicem ad usq; periodum x^6 desideram mitto terminos in infinitum post $-y$ in $a + x + \frac{x^2}{a}$, et isthanc tantùm $y^2 - ay - xy + \frac{x^2}{a}y + \frac{x^4}{4a^2} = 0$. Sive id fiat hâc lege $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{2a} - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{3}{4}x^2 + \frac{x^3}{2a}}$, ut solet sive expeditius per Methodum de affectis Æquationibus jam traditam resolvo: et exit $y = \frac{x^4}{4a^3} - \frac{x^5}{4a^4}$ *, ultimo desiderato termino existente nullo.

Postquam verò radices ad convenientem periodum extracta sunt, possunt aliquando ex Analogiâ seriei observatâ ad placitum produci. Sic hanc $z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$ &c (radicem Æquationes infinitæ $x = y + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{3}y^3$ &c) perpetuò produces dividendo ultimum terminum per hos ordine numeros 2,3,4,5,6,7 &c. Et hanc $z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$ &c dividendo per hos $2\times3, 4\times5, 6\times7, 8\times9$ &c [Et hanc $a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c. multiplicando per hos $\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{-3}{6}, \frac{-5}{8}, \frac{-7}{10}$, &c] Et sic in aliis.

Cæterùm in inventione primi termini quotientis et nonnunquam Secundi tertiive difficultas etiamnum enodanda superest. Potest enim valor ejus secundum præcedentia quæsitus esse Surda sive inextricabilis radix Æquationis multipliciter affectæ. Quod cùm accidit, modò non sit insuper impossibilis, illum literâ aliquâ designabis, dein operabere tanquam si cognitum haberes. Quemadmodum in Exemplo $y^3 + axy + a^2y - x^3 - 2a^3 = 0$, si radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$ fuisset Surda vel ignota, finxissem quamlibet (b) pro ea ponendam esse, et resolutionem (puta ad tertiam Dimensionem quotientis) ut sequitur perfecissem.

$$b - \frac{abx}{c^2} + \frac{a^4bx^2}{c^6} + \frac{x^3}{cc} + \frac{a^3b^3x^3}{c^8} - \frac{a^5bx^3}{c^8} + \frac{6a^5b^3x^3}{c^{10}}$$

$$b + p = y \qquad \begin{array}{l} +y^3 \quad +b^3 + 3b^2p + 3bp^2 + p^3 \\ +axy \\ +a^2y \\ -x^3 \\ -2a^3 \end{array}$$

Scribens b in quotiente, suppono $b + p = y$ et pro y substituo ut vides, unde prodit $p^3 + 3bp^2$ &c. rejectis terminis $b^3 + a^2b - 2a^3$ qui nihilo sunt æquales propterea quod b supponitur radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$ deinde termini $3b^2p + a^2p + abx$ dant $\frac{-abx}{3b^2 + a^2}$ quotienti apponendum & $\frac{-abx}{3b^2 + a^2} + q$ substituendum pro p.

Brevitatis autem gratiâ scribo cc pro 3bb + aa, cavendo tamen ut 3bb + aa restituatur ubi terminos sic abbreviari posse percipiam. Completo opere assumo Numerum aliquem pro a, et hanc $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$ (sicut de numerali Æquatione ostensum supra) resolvo, et quamlibet ejus radicem (modo tres haberet) pro b substituo. Vel potius hujusmodi Æquationes a Speciebus, ut possum, libero, præsertim ab indefinitâ; idq; pro more quem volui inuere pag. lin. Et pro cæteris tantum (siquæ supersint indelebiles) pono Numeros. Sic $y^3+a^2y-2a^3=0$ liberabitur ab a dividendo radicem per a, fitq; $y^3+y-2=0$ cujus inventa radix ducta in a substitui debet pro b.

Hactenus indefinitam Speciem suposui parvam esse. Quod si datæ quantitati vicina supponatur, pro indefinitè parvâ differentiâ pono Speciem aliquam, et hâc substitutâ, solvo ut ante. Quemadmodum in $\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+y-a-x=0$. cognito vel ficto x esse ejusdem prope quantitatis ac a, pono z differentiam inter ea, & scribendo a + z, vel a − z pro x, orietur $\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+y-$ vel $+z=0$ Solvendum ut in præcedentibus.

Sin autem Species illa supponatur indefinite magna, pro reciproco ejus indefinitè parvo pono Speciem aliquam, quâ substitutâ solva ut ante. Sic habito $y^3+y^2+y-x^3=0$ ubi x cognoscitur vel fingitur esse valde magnum pro reciprocè parvo $\frac{1}{x}$ pono z, et substituto $\frac{1}{z}$ pro x, orietur $y^3+y^2+y-\frac{1}{z^3}=0$, cujus radix est $\frac{1}{z}-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}z+\frac{7}{81}z^2+\frac{5}{81}z^3$ &c. et x si placet restituto fit $y=x-\frac{1}{3}-\frac{2}{9x}+\frac{7}{81xx}+\frac{5}{81x^3}$ &c.

Si quando ex aliquâ harum trium suppositionum res non omnino aut non commodè succedat, ad aliam recurri potest. Sic in $y^4-x^2y^2+xy^2+2y^2-2y+1=0$ cum primus terminus obtineri deberet fingendo $y^4+2y^2-2y+1=0$ quæ tamen nullam admittit possibilem radicem, tento quid fiet aliter: quemadmodum si fingam x parùm differre a + 2, sive esse 2 + z = x, substituendo 2 + z vice x prodibit $y^4-z^2y^2-2zy^2-2y+1=0$ et quotiens exordietur ab + 1. Vel si fingam x indefinitè magnam esse, sive $\frac{1}{x}=z$. obtinebitur $y^4-\frac{y^2}{z^2}+\frac{y^2}{z}+2y^2-2y+1=0$, & + z pro initio quotientis.

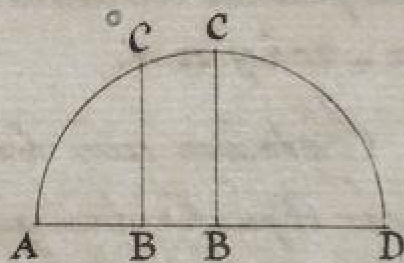
Et hac ratione secundum varias Hypotheses procedendo, licebit varijs modis extrahere ac designare radices.

Quod si capias explorare quot modis id potest fieri, tentabis quænam quantitates pro indefinitâ Specie in Æquationem propositam substitutæ, afficient divisibilem per y + vel − aliquâ quantitate vel per y solum. Id quod verbi gratia in Æquatione $y^3+axy+a^2y-x^3-2a^3=0$ eveniet, substituendo + a, vel − a vel − 2a vel $-\overline{2a^3}|^{\frac{1}{3}}$ &c pro y. Atq; ita possis commodè supponere quantitatem x parùm ab + a, vel − a, vel − 2a, vel $-\overline{2a^3}|^{\frac{1}{3}}$ differre, et inde radicem propositæ Æquationis tot modis extrahere. Imò et fortasse tot alijs modis fingendo differentias istas esse indefinitè magnas. Quinetiam si aliam atq; aliam e speciebus radicem definientibus pro indefinitâ adhibeas, possis alijs adhuc fortassè modis proposi=

propositum consequi; et etiamnum alijs substituendo valores quâcunq; ratione fictos (quales sunt $az + bz^2$, $\frac{a}{b+z}$, $\frac{a+cz}{b+z}$) pro indefinitâ specia & in Æquatione resultante operando sicut in præcedentibus.

Cæterùm ut Conclusionum veritas constet quotientes nempe sic extractos, dum producuntur, ita propiùs ad radicem accedere, ut minùs tandem quâvis datâ quantitate differant, adeoq; in infinitum productos non omninò differre: perpende quod quantitates in sinistrâ Columnâ dextræ partis Diagrammatum, sint ultimi termini Æquationum quarum p, q, r, s &c existunt radices et inde quòd ipsis evanescentibus, illæ p, q, r, s id est differentiæ inter quotientem et quæsitam radicem simul evanescunt. Adeoq; quotiens hinc non differt a radice. Quamobrem sub initio operis si terminos indictâ Columnâ sese omnes destruere videas, conclude quotientem eatenus extractam esse justam radicem. Sin aliter, videbis tamen terminos in quibus indefinite parva Species est pauciorum Dimensionum, id est, longè maximos e Columna ista perpetuò tolli, ut tandem non restent nisi datâ quâvis quantitate minores, et proinde non majores nihilo cùm opus infinitè producitur. Quare quotiens infinitè extracta fiet etiam justa Radix.

[Etsi denìq; Species quas hactenus perspicuitatis grā supposui indefinitè parvas esse, quantumvis magnæ supponantur, tamen veræ erunt quotientes ut minùs citò ad justam radicem convergant quemadmodum ex Analogiâ rei constet. Sed hic Radicum termini maximæque et minimæ quantitates spectandæ veniunt. Nam infinitarum cum finitis Æquationibus communia sunt hujusmodi Symptomata 1. Radix autem in his maxima fit vel minima quando maxima vel minima est differentia Summæ affirmativorum terminorum a Summâ negativorum, ac terminatur cùm indefinita quantitas (quam ideo parvam esse non immeritò finxi) non potest major sumi quin magnitudo radicis in infinitum prosiliet, hoc est fiet impossibilis. Verbi gratiâ posito ACD semicirculo super Diametro AD descripto, et BC Ordinatim applicatâ: Dic AB $= x$, BC $= y$, AD $= a$, et erit $y = (\sqrt{ax - xx} =) \sqrt{ax} - \frac{x}{2a}\sqrt{ax} - \frac{x^2}{8a^2}\sqrt{ax} - \frac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}$ &c ut supra. Fit ergo BC sive y maxima cum $\sqrt{ax}$ maximè superat omnes $\frac{x}{2x}\sqrt{ax} + \frac{x^2}{8a^2}\sqrt{ax} + \frac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}$ &c id est, cùm sit $x = \frac{1}{2}a$: terminabitur autem cùm sit $x = a$, quia si sumas $x \sqsubset a$ Summa omnium terminorum $-\frac{x}{2a}\sqrt{ax} - \frac{x^2}{8a^2}\sqrt{ax} - \frac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}$ &c erit infinita. Est et alius terminus cùm ponitur $x = 0$ propter impossibilitatem radicalis $\sqrt{-ax}$; Quibus terminis correspondent semicirculi limites A et B.]



Prob: 1.

Probl. 1.

Relatione Quantitatum Fluentium inter se data, Fluxionum relationem determinare.

Solutio.

Æquationem qua data relatio exprimitur dispone secundum Dimensiones alicujus fluentis quantitatis puta x, ac terminos ejus multiplica per quamlibet Arithmeticam Progressionem ac deinde per $\frac{\dot{x}}{x}$. Et hoc opus in qualibet fluenti quantitate seorsim institue. Dein omnium factorum Summam pone nihilo æqualem, et habes Æquationem desideratam.

Exemp. 1.

Si x et y relatio sit $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$; terminos primò secundum x ac deinde secundum y dispositos multiplico ad hunc modum.

Mult. $x^3 - ax^2 + axy - y^3$.	Mult. $-y^3 + axy \mp \frac{axx}{xxx}$
per $\frac{3\dot{x}}{x} \cdot \frac{2\dot{x}}{x} \cdot \frac{\dot{x}}{x} \cdot 0$.	per $\frac{3\dot{y}}{y} \cdot \frac{\dot{y}}{y} \cdot 0$
fit $3\dot{x}x^2 - 2\dot{x}ax + \dot{x}ay \cdot *$	fit $-3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x \cdot *$

Et factorum Summa est $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$ Æquatio quæ dat relationem inter Fluxiones $\dot{x}$ & $\dot{y}$. Nempe si assumas x ad arbitrium, Æquatio $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ dabit y. Quibus determinatis erit $\dot{x} : \dot{y} :: 3y^2 - ax : 3x^2 - 2ax + ay$.

Exemp. 2.

Si quantitatum x, y et z relatio sit $2y^3 + x^2y - 2cyz + 3yz^2 - z^3 = 0$.

Mult. $2y^3 + x^2 y - z^3$ $-2cz$ $+3z^2$	Mult. $xy^2 + 2y^3$. $-2cyz$ $+3yzz$ $-z^3$	Mult. $-z^3 + 3yz^2 - 2cyz + x^2y$ $+2y$
per $\frac{2\dot{y}}{y} \cdot 0 \cdot \frac{\dot{y}}{y}$.	per $\frac{2\dot{x}}{x} \cdot 0$.	per $\frac{3\dot{z}}{z} \cdot \frac{2\dot{z}}{z} \cdot \frac{\dot{z}}{z} \cdot 0$
fit $4\dot{y}y^2 * + \frac{\dot{y}z^3}{y}$	fit $2\dot{x}xy \; *$.	fit $-3\dot{z}z^2 + 6\dot{z}yz - 2c\dot{z}y *$

Quare fluendi celeritatum $\dot{x}$, $\dot{y}$ & $\dot{z}$ relatio est $4\dot{y}y^2 + \frac{\dot{y}z^3}{y} + 2\dot{x}xy - 3\dot{z}z^2 + 6\dot{z}yz - 2c\dot{z}y = 0$.

Cæterum cum tres sint hic fluentes quantitates x, y & z, deberet alia in super Æquatio dari qua relatio inter ipsas ut et inter earum Fluxiones penitus determinetur. Quemadmodum si ponitur $x + y - z = 0$. Exinde Fluxionum alia relatio juxta Regulam erit $\dot{x} + \dot{y} - \dot{z} = 0$. Confer jam hasce cum præcedentibus Æquationibus, eliminando quamlibet e tribus quantitatibus et quamlibet etiam e tribus earum fluxionibus et reliquorum relationes penitus determinatas obtinebis.

Siquando

Siquando in Æquatione propositâ insint Fractiones complexæ aut Surdæ quantitates, pro Singulis pono totidem Literis, easq; fingens designare quantitates fluentes, operor ut ante. Dein supprimo et extermino literas ascriptitias, ut hic videre est.

Exemp. 3.

Si quantitatum x et y relatio. Sit $yy - aa - x\sqrt{aa - xx} = 0$: pro $x\sqrt{aa - xx}$ scribo z, et inde habeo duas Æquationes $yy - aa - z = 0$, et $aaxx - x^4 - zz = 0$, quarum prior ut ante dabit $2\dot{y}y - \dot{z} = 0$, pro relatione celeritatum $\dot{y}$ & $\dot{z}$ et posterior dabit $2aa\dot{x}x - 4\dot{x}x^3 - 2\dot{z}z = 0$, sive $\frac{aa\dot{x}x - 2\dot{x}x^3}{z} = \dot{z}$ pro relatione celeritatum $\dot{x}$ et $\dot{z}$. Jam $\dot{z}$ suppresso fiet $2\dot{y}y \frac{-aa\dot{x}x + 2\dot{x}x^3}{\sqrt{aa - xx}} = 0$, relatio inter $\dot{x}$ & $\dot{y}$ quæ quærebatur.

Exemp. 4.

Si $x^3 - ay^2 + \frac{by^3}{a+y} - xx\sqrt{ay + xx} = 0$, designat relationem inter x & y: pono z pro $\frac{by^3}{a+y}$, et v pro $xx\sqrt{ay + xx}$ et inde nactus sum tres Æquationes $x^3 - ay^2 + z - v = 0$, $az + yz - by^3 = 0$ et $ax^4y + x^6 - vv = 0$. Prima dat $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{y}y + \dot{z} - \dot{v} = 0$, Secunda dat $a\dot{z} + \dot{z}y + \dot{y}z - 3b\dot{y}y^2 = 0$, et Tertia dat $4a\dot{x}x^3y + 6\dot{x}x^5 + a\dot{y}x^4 - 2\dot{v}v = 0$, pro relationibus celeritatum $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}$ & $\dot{z}$. Ipsorum verò $\dot{z}$ & $\dot{v}$ valores per Secundam ac Tertiam inventos (nempe $\frac{3b\dot{y}y^2 - \dot{y}z}{a+y}$ pro $\dot{z}$, et $\frac{4a\dot{x}x^3y + 6\dot{x}x^5 + a\dot{y}x^4}{2v}$ pro $\dot{v}$) substituo in primam et oritur $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{y}y + \frac{3b\dot{y}y^2 - \dot{y}z}{a+y} - \frac{4a\dot{x}x^3y - 6\dot{x}x^5}{2v} - \frac{a\dot{y}x^4}{2v} = 0$. Et vice z & v restitutis valoribus $\frac{by^3}{a+y}$ & $x^2\sqrt{ay + xx}$ prodit Æquatio quæsita.

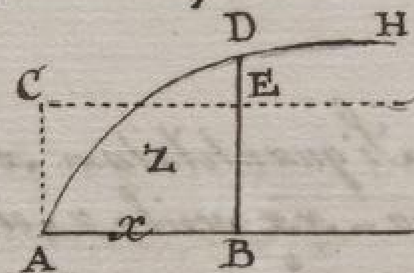
$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{y}y \frac{+3ab\dot{y}y^2 + 2b\dot{y}y^3}{aa + 2ay + yy} \frac{-4a\dot{x}y - 6\dot{x}x^3 - a\dot{y}xx}{2\sqrt{ay + xx}} = 0,$$ quâ relatio celeritatum $\dot{x}$ & $\dot{y}$ designatur.

Quo pacto in alijs Casibus operandum est, quemadmodum cùm in Æquatione propositâ reperiuntur Surdi Denominatores Radicales Cubicæ, radicales intra Radicales ut $\sqrt{ax + \sqrt{aa - xx}}$ aut alij ejusmodi perplexi termini, ex his credo manifestum esse.

Quinimò si in Æquatione Quantitatis involventur quæ nullâ ratione Geometricâ determinari, et exprimi possunt, quales sunt Areæ vel Longitudines Curvarum: tamen relationes Fluxionum haud secus investigantur, prout in Exemplo sequente constabit.

Præparatio in Exemplum 5.

Pone BD Ordinatim esse in Angulo Recto ad AB, et quod ADH sit Curva quæ per relationem inter AB & BD Æquatione qualibet exhibitam definitur. AB verò dicatur x, et Curvæ Area ADB ad unitatem applicata dicatur z. Dein erige Perpendiculum AC æquale unitati, et per C duc CE parallelam AB et occurrentem BD in E, et concipiendo has duas Superficies ADB & ACEB genitas esse per motum rectæ BED, manifestum erit quod earum Fluxiones (hoc est Fluxiones quantitatum $1 \times z$ & $1 \times x$, sive quantitatum z & x) sunt inter se ut BD & BE lineæ generantes. Est ergo $\dot{z} : \dot{x} :: BD : BE$ sive 1. adeoq $\dot{z} = \dot{x} \times BD$.



Et hinc fit quod z in Æquatione quâlibet designante relationem inter x et aliam quamvis Fluentem quantitatem y involvi potest, et tamen Fluxionum $\dot{x}$ & $\dot{y}$ relatio nihil minùs inveniri.

Exemp. 5.

Quemadmodum si proponitur $z^2 + axz - y^4 = 0$ pro designanda relatione inter x & y, ut et $\sqrt{ax - xx} = BD$ pro Curvâ determinandâ quæ proin erit Circulus: Æquatio $zz + axz - y^4 = 0$ sicut in præcedentibus dabit $z\dot{z}z + a\dot{z}x + a\dot{x}z - 4\dot{y}y^3 = 0$, pro relatione celeritatum $\dot{x}$, $\dot{y}$ & $\dot{z}$. Et præterea cum sit $\dot{z} = \dot{x} \times BD$ sive $= \dot{x}\sqrt{ax - xx}$ pro eo substitue hunc valorem et orietur $\overline{2\dot{x}z + a\dot{x}x}\sqrt{ax - xx} + a\dot{x}z - 4\dot{y}y^3 = 0$ Æquatio definiens relationem celeritatum $\dot{x}$ & $\dot{y}$.

Demonstratio.

Fluentium quantitatum momenta (i.e. earum partes indefinitè parvæ quarum additamento per singula temporis indefinitè parvi spatia augentur,) sunt ut Fluendi celeritatis.

Quare si cujusvis ut x momentum per factum ex ejus celeritate $\dot{x}$ et infinitè parva quantitate o (i.e. per $\dot{x}o$) designetur, cæterorum v, y, z, momenta per $\dot{v}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$, designabuntur, siquidem $\dot{v}o$, $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ & $\dot{z}o$ sunt inter se ut $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ & $\dot{z}$.

Iam cum quantitatum Fluentium (ut x & y) momenta ut ($\dot{x}o$ & $\dot{y}o$) sint additamenta infinitè parva quibus illæ quantitates per singula temporis infinite parva intervalla augentur, sequitur quod quantitates illæ x & y post quodlibet infinite parvum temporis intervallum futuræ

sunt.

sunt $x + \dot{x}o$ et $y + \dot{y}o$. Et inde Æquatio quæ relationem quantitatum Fluentium ad omne Tempus indifferenter designat, æque designabit relationem inter $x + \dot{x}o$ et $y + \dot{y}o$, ac inter x & y: adeò ut $x + \dot{x}o$ et $y + \dot{y}o$ pro quantitatibus istis vice x et y in dictam Æquationem substitui posint.

Detur itaq; qualibet Æquatio $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ et substitue $x + \dot{x}o$ pro x, et $y + \dot{y}o$ pro y, et emerget

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2oox + \dot{x}^3o^3 \\ -ax^2 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2oo \\ +axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox \quad + a\dot{x}\dot{y}oo \\ -y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2ooy - \dot{y}^3o^3 \end{array}\right\} = 0$$

Jam ex Hypothesi sunt $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ quibus delectis, et reliquis terminis per o divisis restabunt $3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}^2ox + \dot{x}^3oo - 2a\dot{x}x - a\dot{x}\dot{x}o + a\dot{x}y + a\dot{y}x + a\dot{x}\dot{y}o - 3\dot{y}y^2 - 3\dot{y}^2oy - \dot{y}^3oo = 0$. Et insuper cùm o supponitur esse infinitè parvum, eo ut momenta quantitatum designare posit; termini per illud multiplicati respectu cæterorum nihil valebunt. Rejicio itaq; et restat $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$, ut supra in Exempl. 1.

Hinc observare est quod termini non multiplicati per o semper evanescent, ut et illi multiplicati per o plusquam unius dimensionis: Et quod reliquorum terminorum per o divisorum ea semper erit forma quam juxta Regulam habere debent. Id quod volui ostendere.

Ex hoc monstrato cætera quæ Regula involvit facilè consequentur, quemadmodum quod in Æquatione propositâ plures Fluentes quantitates involvi posunt, et quod termini non modò per numerum Dimensionum quantitatum Fluentium sed per quaslibet alias Arithmeticas Progressiones multiplicari posunt dummodò in Operatione juxta quamlibet Fluentem quantitatem sit eadem terminorum differentia, et Progressio secundum eundem cujusq; Dimensionum ordinem disponatur. Et his concessis quæ præterea in Exemplis 3, 4 & 5 docentur per se manifesta sunt.

Hactenus

Hactenus de modis computandi quorum post hac frequens erit usus. Jam restat ut in illustrationem Artis Analyticæ tradam aliquot Problematum Specimina qualia præsertim natura Curvarum ministrabit. Sed imprimis observandum venit quod hujusmodi difficultates possunt omnes ad hæc duo tantum Problemata reduci quæ circa Spatium motu locali utcunq; Accelerato vel Retardato descriptum proponere licebit.

1. Spatij Longitudine continuò (sive ad omne tempus) data Celeritatem motus ad tempus propositum invenire.
2. Celeritate motûs continuò datâ Longitudinem descripti Spatij ad tempus propositum invenire.

Sic in Æquatione $xx = y$, si y designat Spatij Longitudinem ad quodlibet tempus quod aliud Spatium x uniformi Celeritate $\dot{x}$ crescendo mensurat et exhibet descriptam: hinc $2x\dot{x}$ designabit celeritatem qua Spatium y ad idem temporis momentum describi pergit; et contra. Et hinc est quod in sequentibus considerem Quantitates quasi generatæ essent per incrementum continuum ad modum Spatij quod mobile percurrendo describit.

Cùm autem temporis nullam habemus æstimationem nisi quatenus id per æquabilem motum localem exponitur et mensuratur, et præterea cùm quantitates ejusdem tantùm generis inter se conferri possunt et earum incrementi et decrementi celeritates inter se ea propter ad tempus formaliter spectatum in sequentibus haud respiciam, sed e propositis quantitatibus quæ sunt ejusdem generis aliquam æquabili Fluxione, augeri fingam cui cæteræ tanquam tempori referantur, adeoq; cui nomen temporis analogicè tribui mereatur. Siquando itaq; vocabulum temporis in sequentibus occurrat (quemadmodum perspicuitatis et distinctionis gratiâ nonnunquàm intertexui) eo nomine non tempus formaliter spectatum subintelligi debet sed illa alia quantitas cujus Æquabili incremento sive Fluxione tempus exponitur et mensuratur.

Quantitates autem quas ut sensim cresentes indefinitè considero, quo distinguam ab alijs quantitatibus quæ in Æquationibus quibuscunq; pro determinatis et cognitis habendæ sunt ac initialibus literis a, b, c, &c designantur, posthac denominabo Fluentes, ac designabo finalibus literis v, x, y et z. Et celeritates quibus singulæ a motu generante fluunt et augentur (quas possim Fluxiones vel simpliciter Celeritates vocitare) designabo literis $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ nempe pro Celeritate quantitatis v ponam $\dot{v}$, et sic pro Celeritatibus aliarum quantitatum x, y & z, ponam $\dot{x}$, $\dot{y}$ & $\dot{z}$ respectivè.

His præmissis, e vestigio rem aggredior, imprimis duorum jam modo propositorum Problematum Solutionem exhibiturus.

Prob. 2

Probl: 2.

Exposita Æquatione Fluxiones quantitatum involvente, invenire relationem quantitatum inter se.

Solutio Particularis.

Cum hoc Problema sit praecedentis conversum, contrario modo solvi debet: Utpote terminos per $\dot{x}$ multiplicatos disponendo secundum Dimensiones ipsius x, dividendoq; per $\frac{\dot{x}}{x}$, ac deinde per Numerum Dimensionum aut fortasse per aliam Arithmeticam Progressionem. Atq; idem opus in terminis per $\dot{v}$, $\dot{y}$ vel $\dot{z}$ multiplicatis instituendo, et resultantium summam rejectis terminis redundantibus, ponendo aequalem nihilo.

Exempl.

Sic exposita Æquatione $3\dot{x}xx - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}yy + ay\dot{x} = 0$; Operor ad hunc modum.

Divido $3\dot{x}xx - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y$	Divido $-3\dot{y}yy + ay\dot{x}$
per $\frac{\dot{x}}{x}$ & fit $3x^3 - 2axx + axy$	per $\frac{\dot{y}}{y}$ fit $-3y^3 + axy$
Dein div: per $3 \quad . \quad 2 \quad . \quad 1$	div: per $3 \quad . \quad 1$
Et fit $x^3 - ax^2 + axy$	fit $-y^3 + axy$

Et Summa $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ erit relatio desiderata quantitatum x & y. Ubi observandum venit quod etsi terminus axy bis resultavit, tamen non pono bis in hac Summâ $x^3 - ax^2 + axy - y^3$, sed redundantem terminum rejicio. Et sic ubicunq; terminus aliquis bis resultat (aut saepius si de pluribus Fluentibus quantitatibus agitur) semel tantum in Summa terminorum scribo.

Sunt et aliae circumstantiae quas Artificis ingenio pro re nata observandas esse remitto; nam supervacaneum esset his multa verba impendere, siquidem Problema non semper potest hoc Artificio solvi. Addo tamen quod postquam Artifex relationem fluentium quantitatum hac methodo adeptus est, si juxta Prob. 1. potest regredi ad expositam Æquationem fluxiones involventem recte operatus est; sin secus, vitiose. Sic in Exemplo proposito ubi Æquationem $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ adeptus sum si relatio inter x & x ope primi Problematis vicissim inde requirantur, obtinebitur Æquatio exposita $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + ay\dot{x} = 0$. Unde costat Æquationem $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ recte inventam fuisse. At si Æquatio $\dot{x} - \dot{x}y + \dot{y}a = 0$, exponeretur, et inde praescripta methodo elicerem $\frac{1}{2}xx - xy + ay = 0$, pro relatio inter x & y, vitiosa

foret

feret operatio siquidem exinde per Prob. 1. vicissim produceretur $\dot{x}x - \dot{x}y - \dot{y}x + \dot{y}a = 0$, quæ differt ab Æquatione primo exposita.

Hæc itaque perfunctorie notata prætermittens, Solutionem generalem aggredior.

Præparatio in generalem Solutionem.

Et inprimis observandum est quod in exposita Æquatione Symbola Fluxionum (cum sint Quantitates diversi generis a quantitatibus quarum sunt Fluxiones) in singulis terminis debent ad æque-multas Dimensiones ascendere. Et ubi res aliter se habet, alia alicujus Fluentis quantitatis Fluxio subintelligi debet esse unitas per quam termini depressiones toties multiplicantur ut in omnibus Symbola Fluxionum ad eundem Dimensionum gradum ascendant. Quemadmodum si exponitur Æquatio $\dot{x} + \dot{x}\dot{y}x - axx = 0$, tertiæ alicujus Fluentis quantitatis ut z, fluxio $\dot{z}$ subintelligi debet esse unitas per quam primus terminus $\dot{x}$ semel et ultimus axx bis multiplicetur ut Fluxiones inibi ad æque-multas Dimensiones ac in secundo termino $\dot{x}\dot{y}x$ ascendant quasi exposita Æquatio ex hac $\dot{x}\dot{z} + \dot{x}\dot{y}x - \dot{z}\dot{z}xx = 0$ derivata fuisset ponendo $\dot{z} = 1$. Et sic in Æquatione $\dot{y}x = yy$ debes imaginari $\dot{x}$ esse unitatem per quam terminus yy multiplicatur.

Æquationes autem in quibus duæ tantum sunt Fluentes Quantitates quæ ad æque-multas Dimensiones passim ascendunt, semper possunt ad talem formam reduci ut ex una parte habeatur Ratio Fluxionum (velut $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ vel $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ vel $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, &c) et ex altera parte valor ejus rationis simplicibus terminis Algebraicis designatus; sicut hic videre est $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2 + 2x - y$. Et ubi Æquationibus procedens particularis Solutio non satisfacit, requiritur ut ad hanc formam reducas.

Quamobrem cum in illius rationis valore terminus aliquis a composita quantitate denominetur vel sit radicalis vel si ratio illa sit Æquationis radix affecta: reductio vel per divisionem vel extractionem radicis, vel Æquationis affectæ resolutionem institui debet, prout in superioribus ostensum est.

Quemadmodum si exponitur $\dot{y}a - \dot{y}x - \dot{x}a + \dot{x}x - \dot{x}y = 0$. Hæc imprimis reductione vel fit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + \frac{y}{a-x}$, vel $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{a-x}{a-x+y}$. Et in priori casu si terminum $\frac{y}{a-x}$ a composita quantitate $a-x$ denominatum reduco ad infinitam Seriem simplicium terminorum $\frac{y}{a} + \frac{xy}{a^2} + \frac{xxy}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4}$ &c dividendo Numeratorem y per Denominatorem $a-x$, obtinebo $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + \frac{y}{a} + \frac{xy}{a^2} + \frac{x^2y}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4}$ &c cujus ope relatio inter x & y determinanda est.

Sic

Sic exposita $\dot{y}y = \dot{x}y + \dot{x}xxx$, sive $\frac{\dot{y}y}{\dot{x}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} + xx$, et ulteriori reductione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + xx}$: Radicem Quadraticum e terminis $\frac{1}{4} + xx$ extraho et obtineo infinitam Seriem $\frac{1}{2} + xx - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10}$ &c. quam pro $\sqrt{\frac{1}{4} + xx}$ substituendo prodit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + x^2 - x^4 + 2x^6 - 5x^8$ &c vel $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -x^2 + x^4 - 2x^6 + 5x^8$ &c prout $\sqrt{\frac{1}{4} + xx}$ additur vel subducitur a $\frac{1}{2}$.

Atque ita si exponitur $\dot{y}^3 + ax\dot{x}^2\dot{y} + a^2\dot{x}^2y - \dot{x}^3 - 2\dot{x}^3a^3 = 0$. sive $\frac{\dot{y}^3}{\dot{x}^3} + ax\frac{\dot{y}}{\dot{x}} + aa\frac{\dot{y}}{\dot{x}} - x^3 - 2a^3 = 0$ extraho radicem Cubice affectam, et prodit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$ &c prout videre est ad Pag.

Cæterum hic observandum venit quod terminos solummodo pro compositis habeo qui ex parte Fluentium quantitatum componuntur. Terminos ubi nulla est nisi ex parte datarum quantitatum compositio pro simplicibus habeo, siquidem ad simplices reduci possunt fingendo æquales esse alijs datis. Sic quantitates $\frac{ax + bx}{c}$, $\frac{x}{a+b}$, $\frac{bc}{ax+bx}$, $\frac{b^4}{axx+bxx}$, $\sqrt{ax+bx}$, &c pro simplicibus habeo siquidem ad simplices $\frac{\varepsilon x}{c}$, $\frac{x}{\varepsilon}$, $\frac{bc}{\varepsilon x}$, $\frac{b^4}{\varepsilon x^2}$ $\sqrt{\varepsilon x}$, sive $\varepsilon^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{2}}$ &c reduci possunt fingendo esse $a + b = \varepsilon$.

Præterea quo Fluentes quantitates a se invicem clarius distinguantur, fluxionem quæ in Numeratore Rationis disponitur, sive Antecedentem Rationis haud impropriè Relatam Quantitatem Nominare possum, et alteram ad quam refertur, Correlatam: ut et fluentes Quantitates ijsdem respectivè nominibus insignire. Et quo sequentia promptius intelligantur, possis imaginari Correlatam Quantitatem esse Tempus vel potius aliam quamvis æquabiliter fluentem quantitatem quæ Tempus exponitur et mensuratur; et alteram sive Relatam Quantitatem esse Spatium quod mobile utcunque acceleratum vel retardatum in illo tempore transigit. Et quod Problematis intensio est ut e Celeritate motûs ad omne tempus datâ Spatium in toto tempore transactum determinetur.

Cæterùm Æquationes respectu hujus Problematis in tres ordines distingui convenit. 1. In quibus duæ quantitatem Fluxiones et alterutra tantùm fluens quantitas involvuntur.

2. In quibus duæ involvuntur fluentes quantitates unà cum earum fluxionibus.

3. Quæ plures duabus quantitatum fluxionibus complectuntur. Et his præmissis Problematis confectionem secundum hosce tres casus aggredior.

Solutionis

Solutionis Cas: 1.

Fluentem quantitatem, quam unicè Æquatio complectitur suppone Correlatam esse, et Æquatione perinde dispositâ (hoc est faciendo ut ex una parte habeatur fluxionis alterius ad hujus fluxionem Ratio, et valor ejus in simplicibus terminis ex altera) multiplica valorem Rationis fluxionum per Correlatum Quantitatem, dein singulos ejus terminos divide per numerum dimensionum quibus illa quantitas inibi afficitur, et quod oritur valebit altera Fluenti Quantitate.

Sic exposita $\dot{y}\dot{y} = \dot{x}\dot{y} + \dot{x}\dot{x}xx$, suppono x esse Correlatum Quantitatem et Æquatione perinde reducta habebitur $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + x^2 - x^4 + 2x^6$ &c. Iam duco valorem $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ in x et oritur $x + x^3 - x^5 + 2x^7$ &c quos terminos sigillatim per Numerum dimensionum divido et exitum $x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7$ &c pono $= y$. Et isthac Æquatione desiderata relatio inter x & y determinatur.

Sic habita $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512aa}$ &c prodibit $y = ax - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{192a} + \frac{131x^4}{2048a^2}$ &c. pro determinanda relatione inter x & y.

Et sic Æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{a}{x^{\frac{1}{2}}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}$, dat $y = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + 2ax^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$. Nam valorem $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ duc in x, et fit $\frac{1}{xx} - \frac{1}{x} + ax^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}$ sive $x^{-2} - x^{-1} + ax^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}$. Quibus terminis per numerum dimensionum divisis emergit valor assignatus y.

Ad eundem modum Æquatio $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{2b^2c}{\sqrt{ay^3}} + \frac{3y^2}{a+b} + \sqrt{by + cy}$, dat $x = -\frac{4b^2c}{\sqrt{ay}} + \frac{y^3}{a+b} + \frac{2}{3}\sqrt{by^3 + cy^3}$. Nam valore $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ ducto in y oritur $\frac{2b^2c}{\sqrt{ay}} + \frac{3y^3}{a+b} + \sqrt{by^3 + cy^3}$ sive $2b^2ca^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{a+b}y^3 + {}^{\frac{2}{3}}\sqrt{b+c} \times y^{\frac{3}{2}}$. Et inde prodit valor x, dividendo per numerum Dimensionum cujusque termini.

Atque ita $\frac{\dot{y}}{\dot{z}} = z^{\frac{2}{3}}$, dat $y = \frac{3}{5}z^{\frac{5}{3}}$. Et $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{ab}{cx^3}$, dat $y = \frac{3abx^{\frac{2}{3}}}{2c}$

At Æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{x}$ dat $y = \frac{a}{0}$. Nam $\frac{a}{x}$ ductum in x fit a, quo per Numerum Dimensionum (qui nullus est) diviso prodit $\frac{a}{0}$ quantitas infinita pro valore y.

Quamobrem siquando consimilis terminus (cujus Denominator involvit Correlatam Quantitatem unius tantum Dimensionis) in valore $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, reperiatur, pro Correlata Quantitate substitue Summam vel differentiam inter eandem et aliam quamvis datam quantitatem pro arbitrio assumptam. Nam quantitatum fluentium juxta prodeuntem Æquationem eadem erit inter se fluendi relatio ac juxta Æquationem primò expositam et infinita quantitas Relato hoc pacto parte infinitâ diminuetur et evadet finita, sed terminis tamen numero infinitis constans.

Æquatione itaque $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{x}$, expositâ, si pro x scribam $b + x$, quantitatem b pro lubitu assumens; prodibit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{b+x}$; factaque Divisione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{ax^2}{b^3} - \frac{ax^4}{b^4}$ &c. Et inde Regula ut in Superioribus dabit $y = \frac{ax}{b} - \frac{ax^2}{2b^2} + \frac{ax^3}{3b^3} - \frac{ax^4}{4b^4}$ &c relationem inter x & y.

Sic

Sic etiam habitâ Æquatione $\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{2}{x} + 3 - xx$. Si (propter terminum $\frac{2}{x}$) scribam $1+x$ pro x, emerget $\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{2}{1+x} + 2 - 2x - xx$ terminoq; $\frac{2}{1+x}$ in infinitam Seriem $2 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4$ &c. redacto erit $\frac{\dot y}{\dot x} = 4 - 4x + x^2 - 2x^3 + 2x^4$ &c. Adeoq; juxta Regulam obtinebitur $y = 4x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{5}x^5$ &c. relatio inter x et y.

Atq; ita si proponitur $\frac{\dot y}{\dot x} = x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1} - x^{\frac{1}{2}}$. Quia terminum x^{-1} (sive $\frac{1}{x}$) inesse video, transmuto x: quemadmodum pro eo substituendo $1-x$, et oritur $\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1-x} - \sqrt{1-x}$. Terminus autem $\frac{1}{1-x}$ valet $1 + x + x^2 + x^3$ &c. Et $\sqrt{1-x}$ valet $1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3$ &c. adeoq; $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ sive $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 \,\&c.}$ valet $1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{8}x^3$ &c. Quamobrem (valoribus hisce substitutis) erit $\frac{\dot y}{\dot x} = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{27}{16}x^3$ &c. Et inde per Regulam fit $y = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{27}{64}x^7$ &c. Et sic in aliis.

Hujusmodi etiam transmutatione Fluentis quantitatis Æquatio in aliis casibus nonnunquam commode reduci poterit. Quemadmodum si exponitur $\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{c^2x}{c^3 - 3c^2x + 3cx^2 - x^3}$, pro x scribo $c - x$ et obtineo $\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{c^3 - c^2x}{x^3}$ sive $\frac{c^3}{x^3} - \frac{c^2}{x^2}$, et inde per Regul: $y = -\frac{c^3}{2xx} + \frac{c^2}{x}$. At harum transmutationum usus in sequentibus magis elucescet.

Solutionis Cas: 2.

Præparatio.

Hæc itaq; de Æquationibus involventibus unicam tantum fluentem Quantitatem. Cum verò utraq; involvitur, Æquatio imprimis ad præscriptam formam redigenda est, efficiendo scilicet ut ex una parte habeatur Fluxionum ratio æqualis aggregato simplicium terminorum ex alterâ.

Et præterea siquæ sunt in Æquationibus sic reductis fractiones quæ denominantur a fluenti quantitate, a denominatoribus istis liberari debent per transmutationem ejus fluentis quantitatis paulo ante commemoratam.

Sic exposita Æquatione $\dot y ax - \dot x xy - \dot x aa = 0$, sive $\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{y}{a} + \frac{a}{x}$: (propter terminum $\frac{a}{x}$) assumo b ad arbitrium, et pro x vel scribo $b+x$, vel $b-x$, vel $x-b$. Quemadmodum si scribam $b+x$, fiet $\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{y}{a} + \frac{a}{b+x}$. Adeoq; termino $\frac{a}{b+x}$ in infinitam Seriem per divisionem redacto erit $\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{y}{a} + \frac{a}{b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{ax^2}{b^3} - \frac{ax^3}{b^4}$ &c.

Et ad eundem modum exposita Æquatione $\frac{\dot y}{\dot x} = 3y - 2x + \frac{x}{y} - \frac{2y}{xx}$; si (propter terminos $\frac{x}{y}$ & $\frac{2y}{xx}$) scribam $1-y$ pro y, et $1-x$ pro x, orietur $\frac{\dot y}{\dot x} = 1 - 3y + 2x + \frac{1-x}{1-y} + \frac{2y-2}{1-2x+xx}$. Terminus autem $\frac{1-x}{1-y}$ per infinitam Divisionem dat $1 - x + y - xy + y^2 - xy^2 + y^3 - xy^3$ &c. ac Terminus $\frac{2y-2}{1-2x+xx}$ per similem Divisionem, dat $2y - 2 + 4xy - 4x + 6x^2y - 6x^2 + 8x^3y - 8x^3 + 10x^4y - 10x^4$ &c. Quare est $\frac{\dot y}{\dot x} = -3x + 3xy + y^2 - xy^2 + y^3 - xy^3$ &c. $+ 6x^2y - 6x^2 + 8x^3y - 8x^3 + 10x^4y - 10x^4$ &c.

Regula

Regula.

Æquatione cum opus est sic præparata: terminos ordina juxta Dimensiones fluentium quantitatum ponendo imprimis non affectas Relata Quantitate, deinde affectos minima ejus dimensione, &c: sic deinceps. Terminos etiam in his Singulis classibus juxta dimensiones alterius Correlatæ quantitatis pariter dispone; eosq imprima classe (i.e. quos Relata Quantitas non afficit) scribe in Serie collaterali dextrorsum pergente, et cæteros in Seriebus descendentibus in sinistra Columnâ prout indicant subsequentia Diagrammata. Opere sic instituto Primum sive depressissimum e terminis in prima classe duc in Correlatam Quantitatem divideq per numerum dimensionum, et in Quotiente pro initiali termino valoris Relatæ Quantitatis repone. Hunc deinde in Æquationis terminos in Sinistrâ Columnâ dispositos pro Relata Quantitate substitue, et e terminis proximè depressissimis secundum Quotientis terminum eadem ratione quâ primum elicies. Et eadem Operatione sæpius repetitâ Quotientem ad arbitrium producere possis. Sed res Exemplo clarius patebit.

Exempl: 1.

Exponatur Æquatio $\frac{y}{x} = 1 - 3x + y + x^2 + xy$, cujus terminos $1 - 3x + xx$ non affectos Relata quantitate y.

	$+1 - 3x + xx$
$+y$	$* + x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5$
$+xy$	$* \; * + xx - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{30}x^6$
Summa	$1 - 2x + xx - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{30}x^5$
y	$x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6$ &c.

vides in suprema Serie collateraliter dispositos, cæterosq y et xy in sinistra Columna. Et imprimis terminum initialem 1 duco in Correlatam quantitatem x fitq x, quem per numerum Dimensionum 1 divisum repono in subscripta Quotiente. Dein hoc termino pro y in marginalibus, vice $+y$ et $+xy$, obtineo $+x$ & $+xx$, quos e regione dextrorsum scribens, ex omnibus excerpo depressimos terminos $-3x$ & $+x$ quorum aggregatum $-2x$ ductum in x fit $-2xx$ et per Numerum Dimensionum 2 divisum dat $-xx$ pro secundo termino valoris y in Quotiente. Hoc proinde termino ad complendum valorem y in marginalibus $+y$ & $+xy$ adscito, oriuntur præterea $-xx$ & $-x^3$ terminis prius oriundis $+x$ & $+xx$ adnectendi. Quo facto iterum terminos proximè depressissimos $+xx$, $-xx$ & $+xx$, in unam Summam xx colligo et inde ut prius tertium terminum $\frac{1}{3}x^3$ in valore y reponendum elicio. Iterumq $\frac{1}{3}x^3$ in marginalium terminorum valores adscito, e proxime depressissimis $\frac{1}{3}x^3$ & $-x^3$ in unum aggregatis elicio $-\frac{1}{6}x^4$ quartum terminum valoris y. Et sic in infinitum.

Exemp.

Exempl. 2

Eundem modum si relationem inter x et y, habita Aequatione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + \frac{y}{a} + \frac{xy}{a^2} + \frac{x^2y}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4}$ &c. cujus terminorum Series infinite progredi subintelligitur determinare oportet. Pono 1 in capite reliquosque terminos in sinistra Columna, et opus deinde prosequor pro more adjuncti Diagrammatis.

	$+1$						
$+\frac{y}{a}$	$*$	$+\frac{x}{a}$	$+\frac{x^2}{2a^2}$	$+\frac{x^3}{2a^3}$	$+\frac{x^4}{2a^4}$	$+\frac{x^5}{2a^3}$	&c.
$+\frac{xy}{a^2}$	$*$	$*$	$+\frac{x^2}{a^2}$	$+\frac{x^3}{2a^3}$	$+\frac{x^4}{2a^4}$	$+\frac{x^5}{2a^5}$	&c.
$+\frac{x^2y}{a^3}$	$*$	$*$	$*$	$+\frac{x^3}{a^3}$	$+\frac{x^4}{2a^4}$	$+\frac{x^5}{2a^5}$	&c.
$+\frac{x^3y}{a^4}$	$*$	$*$	$*$	$*$	$\frac{x^4}{a^4}$	$+\frac{x^5}{2a^5}$	&c
$+\frac{x^4y}{a^5}$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$+\frac{x^5}{a^5}$	&c.
Summa	1	$+\frac{x}{a}$	$+\frac{3x^2}{2a^2}$	$+\frac{2x^3}{a^3}$	$+\frac{5x^4}{2a^4}$	$+\frac{3x^5}{a^5}$	

$$y = x + \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{2a^2} + \frac{x^4}{2a^3} + \frac{x^5}{2a^4} + \frac{x^6}{2a^5} \text{ &c.}$$

Ubi propositum est mihi elicere valorem y adusque sex dimensiones x, et eâ de causâ terminos omnes quos proposito nihil conducere prævideo, inter operandum missos facio sicut innuit nota &c quam Seriebus intercisis adnexui.

Exempl: 3.

Pari, methodo si proponitur Aequatio $y = -3x + 3xy + yy - xyy + y^3 - xy^3 + y^4 - xy^4 + 6x^2y - 6x^2 + 8x3y - 8x^3 + 10x^4y - 10x^4 + 12x^5y - 12x^5$ &c

Et valorem y adusque septem dimensiones x eruere institutum est terminos, ut in adjuncto Diagrammate, in ordinem redigo, et operor sicut in præcedentibus hoc tantum excepto quod cum hic in sinistrâ Columnâ y non tantum unius sed etiam duarum ac trium Dimensionum existit (vel etiam plurium prout valorem y ultra gradum x^7 extrahere statuam) subjicio Quadratum et Cubum valoris y gradatim productum ut cum in valoribus marginalium dextrorsum gradibus inscribuntur, termini tot dimensionum emergant quot ad sequentem operationem requiri percipio. Et hac methodo prodit tandem $y = -\frac{3}{2}x^2 - 6x^3 - \frac{25}{8}x^4$ &c Aequatio desiderata. Quin valor cum sit negativus patet alterum e quantitatibus x & y decrescere dum altera increscit. Atque idem pariter concludi debet cum fluxionum altera affirmativa est et altera negativa.

	$-3x$	$-6x^2$	$-8x^3$	$-10x^4$	$-12x^5$	$-14x^6$	&c
$+3xy$	$*$	$*$	$-\frac{9}{2}x^3$	$-6x^4$	$-\frac{75}{8}x^5$	$-\frac{273}{20}x^6$	&c
$+6x^2y$	$*$	$*$	$*$	$-9x^4$	$-12x^5$	$-\frac{75}{6}x^6$	&c
$+8x^3y$	$*$	$*$	$*$	$*$	$-12x^5$	$-16x^6$	&c
$+10x^4y$ &c	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$-15x^6$	&c
$+y^2$	$*$	$*$	$*$	$+\frac{9}{4}x^4$	$+6x^5$	$+\frac{107}{8}x^6$	&c
$-xy^2$	$*$	$*$	$*$	$*$	$-\frac{9}{4}x^5$	$-6x^6$	&c
$+y^3$ &c	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$-\frac{27}{8}x^6$	&c
Summa	$-3x$	$-6x^2$	$-\frac{25}{2}x^3$	$-\frac{91}{4}x^4$	$-\frac{333}{8}x^5$	$-\frac{302}{5}x^6$	

$$y = -\frac{3}{2}x^2 - 2x^3 - \frac{25}{8}x^4 - \frac{91}{20}x^5 - \frac{111}{16}x^6 - \frac{302}{35}x^7 \text{ &c}$$

$$y^2 = +\frac{9}{4}x^4 + 6x^5 + \frac{107}{8}x^6 \text{ &c}$$

$$y^3 = -\frac{27}{8}x^6, \text{ &c.}$$

Exempl. 4.

Haud secus cum Relata quantitas fractis dimensionibus afficitur possis valorem ejus extrahere.

Veluti si proponitur $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}y - 4y^2 + 2yx^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{5}x^2 + 7y^{\frac{5}{2}} + 2y^3$, ubi x in termino $2yx^{\frac{1}{2}}$ (sive $2y\sqrt{x}$) fracta dimensione $\frac{1}{2}$ afficitur. Ejus $x^{\frac{1}{2}}$ valorem e valore x paulatim elicio (extrahendo nempe radicem Quadraticam) sicut in inferiori parte Diagrammatis videre est; eo ut in marginalis termini $2yx^{\frac{1}{2}}$ valorem gradatim transferri et inseri possit. Et sic tandem adipiscor Æquationem $x = \frac{1}{4}y^2 - y^3 + 2y^{\frac{7}{2}} + \frac{8}{9}y^{\frac{9}{2}} - \frac{41}{100}y^5$ &c. qua x respectu y indefinitè determinatur.

	$+\frac{1}{2}y. \; -4y^2 + 7y^{\frac{5}{2}} + 2y^3$
$2yx^{\frac{1}{2}}$	$* . + y^2. \; * - 2y^3 + 4y^{\frac{7}{2}} - 2y^4$ &c
$-\frac{4}{5}x^2$	$* . \; * . \; * \; * \; * \; -\frac{1}{20}y^4$ &c
Summa	$+\frac{1}{2}y. \; -3y^2 + 7y^{\frac{5}{2}} \; * + 4y^{\frac{7}{2}} - \frac{41}{20}y^4$
$x = +\frac{1}{4}y^2 - y^3 + 2y^{\frac{7}{2}} \; * + \frac{8}{9}y^{\frac{9}{2}} - \frac{41}{100}y^5$ &c $x^{\frac{1}{2}} = +\frac{1}{2}y - y^2 + 2y^{\frac{5}{2}} - y^3$ &c $x^2 = \frac{1}{16}y^4$ &c.	

Et sic in alijs quibuscunque casibus operari licet.

Cæterum dixi hasce Solutiones infinitis modis præstari posse. Et hoc fiet si non tantum initialem quantitatem supremæ Series sed et aliam quamvis datam quantitatem pro primo termino Quotientis ad arbitrium assumas, ac deinde opereris ut in præcedentibus. Sic in primo præcedentium exemplorum. Si pro primo termino valoris y assumas 1, et pro y in terminis marginalibus ($+y$ & $+xy$) substituas reliquamque operationem (cujus Specimen adjunxi) sicut in præcedentibus prosequaris ipsius y alius exurget valor $1 + 2x + x^3 + \frac{1}{4}x^4$ &c. Et sic in alius atque alius exurget assumendo 2, 3 vel alium quemvis numerum pro primo ejus termino. Vel si Symbolum aliquod, ut a, pro illo termino indefinitè designando usurpas, eadem operandi methodo (quam hic etiam designatam habis) elicies tandem $y = a + x + ax - xx + axx + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}ax^3$ &c. Qua inventa possis pro a substituere 1, 2, 0, $\frac{1}{2}$ aut quemvis Numerum, et sic relationum inter x & y modis infinitis obtinere.

	$+1 - 3x + xx$
$+y$	$+1 + 2x \; * + x^3 + \frac{1}{4}x^4$ &c
$+xy$	$* + x + 2xx \; * + x^4$ &c
Summa	$+2 \; * \; + 3xx + x^3 + \frac{5}{4}x^4$
$y = 1 + 2x * + x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5$ &c	

	$+1 - 3x + xx$
$+y$	$+a + x - xx + \frac{1}{3}x^3$ &c $+ax + axx + \frac{2}{3}ax^3$
$+xy$	$* + ax + xx - x^3$ &c $+ axx + ax^3$
Summa	$+1 - 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3$ $+a + 2ax + 2ax^2 + \frac{5}{3}ax^3$
$y = a + x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4$ $+ax + axx + \frac{2}{3}ax^3 + \frac{5}{12}ax^4$ &c	

Et nota quod ubi quantitas elicienda afficitur fracta dimensione (ut in præcedentium Exemplorum quarto vides) convenit plerumque unitatem vel aliam quemvis aptum numerum pro primo ejus termino adhibere; immò hoc necesse

necesse est ubi radix (ad facta illius dimensionis valorem obtinendum) propter negativum signum nequit alias extrahi ut et ubi nulli sunt termini in prima sive capitali classe reponendi, ex quibus initialis ille terminus eliciantur.

Sic tandem hoc molestissimum et omnium difficillimum Problema ubi duæ tantum fluentes quantitates una cum earum fluxionibus in Æquatione comprehenduntur absolvi: sed præter generalem methodum qua omnes difficultates complexus sum sunt aliæ plerumq contractiores quibus opus aliquando sublevari possit, et quarum aliqua Specimina ex abundanti perstringere forte non erit ingratum.

1. Siquando itaq quantitas elicienda sit alicubi negatæ dimensionis non est absolute necessarium ut Æquatio propterea ad aliam formam reducatur. Sic enim exposita Æquatione $\dot{y} = \frac{1}{y} - xx$ ubi y est unius negatæ dimensionis, possim equidem ad aliam formam reducere, veluti, scribendo $1+y$ pro y, sed expeditior erit resolutio quam in annexo Diagrammate designatam habes, ubi assumpto 1 pro initio valoris y cæteros ejus terminos ut in præcedentibus extraho, et interea valorem $\frac{1}{y}$ exinde per Divisionem paulatim institutam elicio et insero in valorem marginalis termini.

	$*\quad *\quad -xx$
$\frac{1}{y}$	$1 - x + \frac{3}{2}xx$ &c
Summa	$1 - x + \frac{1}{2}xx$

$$y = 1 + x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 \text{ \&c}$$
$$\frac{1}{y} = 1 - x + \tfrac{3}{2}x^2 \text{ \&c.}$$

2. Neq semper opus est ut alterius Fluentis quantitatis Dimensiones sint passim affirmativæ. Nam ex Æquatione $\dot{y} = 3 + 2y - \frac{yy}{x}$, absq termini $\frac{yy}{x}$ reductione præscripta emerget $y = 3x - \frac{3}{2}xx - 4x^3$ &c.

Et ex $\dot{y} = -y + \frac{1}{x} - \frac{1}{xx}$ (opere ad modum annexi Speciminis instituto) emerget $y = \frac{1}{x}$

	$-\frac{1}{xx} + \frac{1}{x}$
$-y$	$* \quad - \frac{1}{x}$
Summa	$-\frac{1}{xx} \quad 0$
$y = \frac{1}{x}$	

Ubi obiter nota quod inter modos infinitos quibus quælibet Æquatio resolvi potest sæpe numero contingit aliquos esse qui ad finitum valorem quantitatis eliciendæ sicut in allato Specimine finiuntur, et quos haud difficile est invenire si pro primo valoris termino Symbolum aliquod assumatur. Et resolutione peracta consulatur de Symbola illius quantitate qua valor elicitus evadat finitus.

3. Porro si valor y ex Aequatione $\dot{y} = \frac{y}{2x} + 1 - 2x + \frac{1}{2}xx$ eliciendus sit, id sine aliqua reductione termini $\frac{y}{2x}$ non incommodè fiat fingendo (pro more Analytico) datum esse quod quæritur. Utpote pro primo termino valoris ejus effingo $2ex$ assumendo e pro numerali coefficiente quæ nondum innotescit. Et hunc $2ex$ pro y in termino marginali $\frac{y}{2x}$ substituens prodit (e) quem scribo ad dextram et Summa $1 + e$ dabit $x + ex$ pro eodem primo termino valoris y quem prius designaveram termino $2ex$. Pono itaq $2ex = x + ex$ et inde elicio $e = 1$. Adeoq valoris y primus terminus ($2ex$) est $2x$. Ad eundem modum pro secundo termino designando effictum $2fx^2$ usurpo et inde tandem eruo $-\frac{2}{3}$ pro valore f, adeoq $-\frac{4}{3}xx$ pro secundo termino. Et sic effictus g in tertio termino valebit $\frac{1}{10}$, at h in quarto valebit o, et proinde cum nullos præterea terminos superesse video, concludo opus finitum esse, et y valore $2x - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^3$ præcisè.

<table>
<tr><td></td><td>$1 - 2x + \frac{1}{2}xx$</td></tr>
<tr><td>$\frac{y}{2x}$</td><td>$e + fx + gxx + hx^3$</td></tr>
<tr><td>Summa</td><td>$+1 - 2x + \frac{1}{2}xx + hx^3$
$+e + fx + gxx$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hypotheticè $y = 2ex + 2fx^2 + 2gx^3 + 2hx^4$
Consequenter $y = +\overset{''}{x} - \overset{''}{x}x + \frac{1}{6}\overset{''}{x}^3 + \frac{1}{4}\overset{''}{h}x^4$
$+ex + \frac{1}{2}fxx + \frac{1}{3}gx^3$
Revera $y = 2x - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^3$</td></tr>
</table>

Ad eundem ferè modum si esset $\dot{y} = \frac{3y}{4x}$, effinge $y = ex^s$, ubi (e) ignotum coefficientem et s numerum dimensionum similiter ignotum denotet. Et ex^s pro y substituto, prodibit $\dot{y} = \frac{3ex^{s-1}}{4}$, et inde rursus $y = \frac{3ex^s}{4s}$. Conferantur jam valores y, et videbis esse $\frac{3e}{4s} = e$, adeoq $s = \frac{3}{4}$ et e indefinitum. Quare assumpto utcunq e, erit $y = ex^{\frac{3}{4}}$.

4. Ad hæc nonnunquam opus ab altissima dimensione æquabilis quantitatis inchoari potest et ad depressiores continuo pergere, veluti si detur $\dot{y} = \frac{y}{xx} + \frac{1}{xx} + 3 + 2x - \frac{4}{x}$, et ab altissimo termino $2x$ opus inchoetur disponendo capitalem Seriem in ordine præcedentibus contrario, emerget tandem $y = xx + 4x - \frac{1}{x}$ &c prout in apposita operandi forma videre est.

<table>
<tr><td></td><td>$+2x + 3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{xx}$</td></tr>
<tr><td>$+\frac{y}{xx}$</td><td>$* + 1 + \frac{4}{x} \quad * - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^4}$ &c</td></tr>
<tr><td>Summa</td><td>$+2x + 4 \quad * + \frac{1}{xx} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^4}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y = xx + 4x \; * - \frac{1}{x} + \frac{1}{2xx} - \frac{1}{6x^3}$ &c</td></tr>
</table>

Et hic in transitu notari potest quod inter operandum potuit inter terminos $4x$ et $-\frac{1}{x}$ pro intermedio deficienti termino quælibet data quantitas inseri, et sic valor y modis infinitis extrahi.

5. Siquæ

5. Siquæ præterea sint fracta dimensionum Relatæ Quantitatis indices, ad integros reduci possunt fingendo quantitatem illam sua fracta dimensione affectam esse alij cuilibet tertiæ Fluenti quantitati æqualem, et substituendo tum illam quantitatem tum Fluxionem ejus ab illa ficta Æquatione oriundam pro Relata Quantitate et ejus Fluxione

Quemadmodum si exponitur Æquatio $\dot{y}=3xy^{\frac{2}{3}}+y$, ubi Relata Quantitas fracta dimensionis indice $\frac{2}{3}$ afficitur, assumpta ad arbitrium fluenti quantitate z finge esse $y^{\frac{1}{3}}=z$, sive $y=z^3$, et Fluxionum relatio juxta Prob. 1. erit $\dot{y}=3\dot{z}zz$. Quare substituto $3\dot{z}zz$ pro $\dot{y}$ ut et z^3 pro y ac zz pro $y^{\frac{2}{3}}$ emerget $3\dot{z}zz=3xzz+z^3$, sive $\dot{z}=x+\frac{1}{3}z$. Ubi z supplet vices Relatæ Quantitatis. Postquam vero valor z, eo nomine eruitur utpote $z=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{18}x^3+\frac{1}{216}x^4+\frac{1}{3240}x^5$ &c. pro z restitue $y^{\frac{1}{3}}$ et habebis desideratam relationem inter x & y, nempe $y^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{18}x^3+\frac{1}{216}x^4$ &c. Et Cubis partium utrobique positis erit $y=\frac{1}{8}x^6+\frac{1}{24}x^7+\frac{1}{288}x^8$ &c.

Pari ratione si detur $\dot{y}=\sqrt{4y}+\sqrt{xy}$, sive $=2y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ fingo $z=y^{\frac{1}{2}}$ sive $zz=y$, et inde per Prob. 1. elicio $2\dot{z}z=\dot{y}$, et consequenter $2\dot{z}z=2z+x^{\frac{1}{2}}z$, sive $\dot{z}=1+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Adeoque per casum priorem hujus est $z\,(y^{\frac{1}{2}})=x+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$, et partibus Quadratis $y=xx+\frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{9}x^3$. Sin valorem y modis infinitis desideras, fac $z=c+x+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ assumpto utcunque initiali termino c, et erit $y\,(zz)=c^2+2cx+\frac{2}{3}cx^{\frac{3}{2}}+x^2+\frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{9}x^3$.

Ast hæc nimis officiose tractare videor siquidem rarissimè usui esse possunt.

Solutionis Cas: 3.

Problematis ubi tres vel plures quantitatum fluxiones Æquatio complectitur Resolutio brevi absolvitur. Scilicet inter duas quaslibet istarum quantitatum relatio (ubi ex statu Quæstionis non determinatur) qualibet effingi debet, et earum fluxionum exinde quæri, eo ut alterutra unà cum ejus fluxione ex Æquatione exposità exterminari possit. Quà de causà si trium insunt quantitatum fluxiones unica effingenda est Æquatio ac duæ si insunt quatuor, et sic porro, ut exposita Æquatio in aliam tandem Æquationem transformetur cui non insint plures duabus. Et hæc deinde ut supra resoluta reliquarum quantitatum relationes eruentur.

Sic Æquatio $2\dot{x}-\dot{z}+\dot{y}x=0$, exposita; quo quantitatum x, y et z (quarum fluxiones $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ Æquatio complectitur) relationes inter se obtineam, relationem inter duas quaslibet ut x & y pro lubitu effingo, puta quod sit $x=y$, vel $2y=a+z$, vel $x=yy$ &c. Sit autem $x=yy$, et inde erit $\dot{x}=2\dot{y}y$, Quare scriptis $2\dot{y}y$ pro $\dot{x}$, et yy pro x, exposita Æquatio transformabitur in $4\dot{y}y-\dot{z}+\dot{y}yy=0$. Et inde

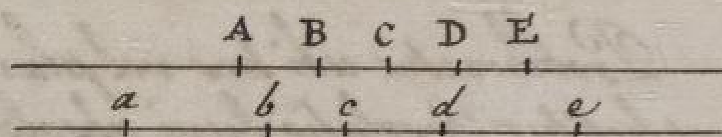
Et inde relatio inter y & z emerget $2yy+\frac{1}{3}y^3=z$. Ubi si x pro yy, et $x^{\frac{3}{2}}$ pro y^3, vicissim scribatur prodibit etiam $2x+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}=z$.

Adeoq inter modos infinitas quibus x, y & z ad invicem referuntur unius his Æquationibus $x=yy$. $2y^2+\frac{1}{3}y^3=z$, et $2x+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}=z$. designatus investigatur.

Demonstratio.

Problema tandem confecimus sed Demonstratio superest. Et in tanta rerum copiâ ne per nimias ambages e proprijs fundamentis Synthetice derivetur, sufficiat per Analysin sic breviter indicare. Scilicet, Æquatione qualibet expositâ postquam opus ad finem perduxeris experiri est quod ex elicitâ Æquatione exposita vicissim (per Prob. 1.) eruetur. Et proinde Quantitatum relatio in elicita Æquatione exigit relationem fluxionum in exposita, et contra: Sicut ostendendum erat. Sic Æquatio $\dot{y}=x$ expositâ elicietur $y=\frac{1}{2}x^2$; et inde vicissim (per Prob. 1.) $\dot{y}=\dot{x}x$ sive $=x$, quando quidem $\dot{x}$ supponitur esse 1. Et sic ex $\dot{y}=1-3x+y+xx+xy$ provenit $y=x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{30}x^5-\frac{1}{45}x^6$ &c. Et inde vicissim per Prob. 1. $\dot{y}=1-2x+x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4-\frac{2}{15}x^5$ &c. Qui duo valores ipsius $\dot{y}$ conveniunt, ut patet substituendo $x-xx+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{30}x^5$ &c pro y in priori.

Cæterùm in Æquationum reductione adhibui operationem de qua præterea rationem reddere oportet: Estq transmutatio fluentis quantitatis per connexionem cum Quantitate data.



Sunto AE et ae Lineæ utrinq infinitæ per quas mobilia duo e longinquo trajiciantur simul attingentia locos A et a, B et b, C et c, D & d. &c. Et sit B punctum a cujus rei mobilis distantiâ in AE motus æstimetur ita ut −BA, BC, BD, BE, successive sint Fluentes quantitates quando mobile sit in Locis A, C, D, E. Sitq b consimile punctum in altera Linea: Et erunt −BA ac −ba contemporaneæ fluentes quantitates, ut et BC ac bc, BD ac bd, BE ac be &c. Quod si vice punctorum B & b substituantur A & C ad quæ tanquam quiescentia motus referantur, tunc o et −ca, AB & −cb, AC & o. AD & cd, AE & ce, &c. erunt contemporaneæ fluentes quantitates. Mutantur itaq fluentes quantitates Additione & Subtractione datarum AB & bc, Sed non mutantur quoad motûs celeritatem et fluxionis mutuum respectum; nam ejusdem longitudinis sunt partes contemporaneæ AB & ab, BC & bc, CD & cd, DE & de in utroq casu.

Et

Et sic in Æquationibus quibus hæ quantitates designantur partes contemporaneæ quantitatum non ideo mutantur quod earum absoluta longitudo datâ aliquâ augeatur vel minuatur. Unde constat Propositum: Nam Problematis hujus Scopus propriè non alius est quam contemporaneas partes sive absolutarum quantitatum ($v, x, y,$ aut z) contemporaneas differentias data fluendi ratione descriptas determinare. Et proinde est cujusnam sint absolutæ longitudinis quantitates illæ dummodo contemporaneæ sive correspondentes earum differentiæ cum exposita fluxionum relatione conveniant.

Potest et hujus rei ratio sic Algebraicè reddi. Proponatur $\dot{y} = \dot{x}xy$, et finge $x = 1 + z$ eritq (per Prob. 1.) $\dot{y} = \dot{z}$. Adeoq pro $\dot{y} = \dot{x}xy$ scribi potest $\dot{z} = \dot{x}y + \dot{x}zy$. Iam cum sit $\dot{y} = \dot{z}$, patet quantitates x & z etsi non sint ejusdem longitudinis, pariter tamen fluere respectu ipsius y, et pares habere partes contemporaneas. Quid itaq si ijsdem Symbolis denotem quæ fluendi ratione conveniunt et ad contemporaneas differentias determinandas vice $\dot{y} = \dot{x}xy$ usurpem $\dot{y} = \dot{x}y + \dot{x}xy$

Iam deniq quo pacto partes contemporaneæ ex Æquatione Quantitates involvente invenire possint per se manifestum est. E.G. Sit $y = \frac{1}{x} + x$ Æquatio. Et cum sit $x = 2$ erit $y = 2\frac{1}{2}$, cum vero sit $x = 3$, erit $y = 3\frac{1}{3}$, ergo dum x fluit a 2 ad 3 y fluit a $2\frac{1}{2}$ ad $3\frac{1}{3}$. Adeoq partes in hoc tempore transactæ sunt $(3-2)$ 1, et $(3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2})\frac{5}{6}$.

Iactis hisce sequentium fundamentis ad Problemata magis particularia jam transeo.

Prob. 3.

Prob: 3.

Determinare Maximas et Minimas.

Quantitas ubi Maxima est vel Minima, in illo Momento nec profluit nec refluit. Nam si profluit, id arguit minorem fuisse et statim majorem fore quam jam est; et contra si refluit. Quamobrem fluxionem ejus per Prob. 1. quære et pone nullam esse.

Exemp. 1.

Si Maxima Quantitas x in Æquatione $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ desideretur. Quantitatum x et y Fluxiones quære, et prodibit $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$. Positoque $\dot{x} = 0$, restabit $-3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$, sive $3y^2 = ax$. Cujus ope possis alterutrum x vel y in Æquatione primaria exterminare, et per Æquationem restantem determinare alteram, et utramque deinde per $3y^2 + ax = 0$.

Perinde est hæc operatio ac si multiplicasses terminos propositæ Æquationis per Numerum Dimensionum alterius Fluentis quantitatis y. Unde prodit Huddeniana notissima Regula quod ad obtineandem Maximam aut Minimam Relatam Quantitatem Æquatio juxta Dimensionis Correlatæ Quantitatis disponi debet et per quamlibet Arithmeticam Progressionem multiplicari. Ast cum neque hæc Regula ad Æquationis Surdis Quantitatibus affectas, neque ulla alia hactenus quod sciam evulgata, absque prævia reductione se extendat: Ejus rei accipe sequens Exemplum.

Exemp: 2

Si Maxima quantitas y in Æquatione $x^3 - ay^2 + \frac{by^3}{a+y} - xx\sqrt{ay+xx} = 0$ determinanda est; ipsarum x & y fluxiones quære et emerget $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{y}y - \frac{3ab\dot{y}y^2 + 2b\dot{y}y^3}{a^2 + 2ay + yy} - \frac{4a\dot{x}xy - 6\dot{x}x^3 - a\dot{y}x^2}{2\sqrt{ay+xx}} = 0$. Et cum ex Hypothesi sit $\dot{y} = 0$, neglige terminos in $\dot{y}$ ductos (id quod inter operandum ad minuendum laborem antea fieri potuit) cæterosque per $\dot{x}x$ divide, et restabit $3x - \frac{2ay - 3xx}{\sqrt{ay+xx}} = 0$ factoque reductione exurget $4ay + 3xx = 0$. Cujus ope possis utramvis quantitatem x vel y ex Æquatione primò proposita exterminare ac deinde ex Æquatione resultante (quæ Cubica erit) valorem alterius elicere.

Ex

Ex hoc Problemate sequentium resolutio petenda est.

1. In dato Triangulo aut Segmento cujusvis Curvæ Maximum Rectangulum inscribere.

2. Maximam vel Minimam rectarum ducere quæ inter datum Punctum et Curvam positione datam interjacent, sive, a dato Puncto ad Curvam ducere perpendiculum.

3. Maximam vel Minimam rectarum ducere quæ per datum Punctum transeuntes interjacent alijs duabus sive rectis sive Curvis lineis.

4. A Puncto intra Parabolam dato rectam ducere quæ Parabolam omnium obliquissimè secabit. Et idem in alijs Curvis facere.

5. Curvarum vertices Maximas aut Minimas Latitudines Puncta in quibus Partes circumactæ se decussant determinare.

6. Curvarum Puncta invenire ubi Maxime aut Minime curvantur.

7. Invenire Minimam Angulorum in quibus rectæ ad Diametros suas in data Elipsi ordinatim applicantur.

8. Ellipsium per data quatuor puncta transeuntium vel Minimum definere, vel eam quæ ad formam circularem Maxime accedit.

9. Amplitudinem Sphericæ Superficiei determinare quam Lux e longinquo fluens postquam ab anteriori Hemisphærio refracta fuit illustrat in posteriori.

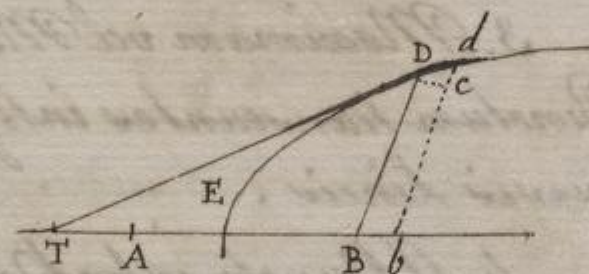
Et hujusmodi alia permulta faciliùs excogitari possunt quàm (propter computandi fastidium) resolvi.

Prob: 4.

Curvarum Tangentes ducere.

Modus 1.

Tangentes pro varijs relationibus Curvarum ad rectas variè ducuntur. Et imprimis esto BD recta in dato Angulo ad aliam rectam AB tanquam basin Ordinata et ad Curvam ED terminata. Et moveatur hæc Ordinata per indefinitè parvum Spatium ad locum bd, ita ut momento cd augeatur dum AB augetur momento Bb, cui Dc æqualis est. Jam producatur Dd donec cum AB in T conveniat, et hæc Tanget curvam in D vel d; Eruntq triangula dcD, DBT similia. Adeoq TB : BD :: Dc : cd.



Cùm itaq relatio BD ad AB in Æquatione qualibet pro Curva determinanda exponitur, quære relationem fluxionum (per Prob. 1). Et cape TB ad BD in ratione Fluxionis AB ad Fluxionem BD, ac TD tanget Curvam in D.

Exemp: 1.

Nominata AB x, et BD y, esto earum relatio $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ .... Et Fluxionum relatio erit $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$. Adeoq $\dot{y} : \dot{x} :: 3xx - 2ax + ay : 3yy - ax ::$ BD (y) : BT. Ergo BT $= \frac{3y^3 - axy}{3x^2 - 2ax + ay}$. Dato itaq puncto D, et inde DB & AB sive y & x; dabitur longitudo BT, qua Tangens TD determinatur.

Potest autem hæc operandi Methodus sic concinnari; Æquationis expositæ terminos fac esse nihilo æquales: Per proprium numerum Dimensionum Ordinatæ quantitatis multiplica, et exitum colloca in Numeratore; Dein terminos ejusdem Æquationis per proprium Numerum Dimensionum. Basis Multiplica, et exitum per Basin divisum colloca in Denominatore valoris BT. Et illam BT cape ad partes adversus A si valor ejus sit affirmativus, aut versus A si sit negativus.

Sic Æquatio $\underset{3}{\overset{0}{x^3}} \,\dot{-}\, \underset{2}{\overset{0}{ax^2}} \,\dot{+}\, \underset{1}{\overset{1}{axy}} \,\dot{-}\, \underset{0}{\overset{3}{y^3}} = 0$, per superiores Numeros Multiplicata dat $axy - 3y^3$ pro Numeratore; Et per inferiores Multiplicata, ac divisa per x dat $3x^2 - 2ax + ay$ pro denominatore valoris BT.

Sic

Sic Æquatio $y^3 - by^2 - cdy + bcd + dxy = 0$ (qua designat Parabolam secundi generis cujus beneficio Des Cartes construxit Æquationes 6 Dimensionum vid. Geom. Cart. p. 42) prima fronte dat $\frac{3y^3 - 2by^2 - cdy + dxy}{dy}$ sive $\frac{3yy}{d} - \frac{2by}{d} - c + x = BT$.

Et sic $a^2 - \frac{r}{q}x^2 - y^2 = 0$ (quæ designat Ellipsin cujus centrum A) dat $\frac{-2yy}{-\frac{2r}{q}x}$ sive $\frac{qyy}{rx} = BT$. Et sic in alijs.

Et nota quod nihil interest cujusnam quantitatis sit Angulus Ordinationis ABD.

Ast hæc Regula se ad Æquationes Surdis quantitatibus affectas, Curvasq Mechanicas non extendit. In istis casibus ad fundamentalem Methodum recurrendum est.

Exempl: 2.

Esto $x^3 - ay^2 + \frac{by^3}{a+y} - xx\sqrt{ay + xx} = 0$ Æquatio designatis relationem inter AB & BD et per Prob. 1 relatio fluxionum erit $3\dot{x}xx - 2a\dot{y}y + \frac{3ab\dot{y}yy + 2b\dot{y}y^3}{aa + 2ay + yy} - \frac{4a\dot{x}xy - 6\dot{x}x^3 - a\dot{y}x^2}{2\sqrt{ay + xx}} = 0$. Atque adeò est ---

$3xx \frac{-4axy - 6x^3}{2\sqrt{ay + xx}} : 2ay + \frac{3abyy + 2by^3}{aa + 2ay + y^2} \frac{-axx}{2\sqrt{ay + xx}} (:: \dot{y} : \dot{x}) :: BD : BT$.

Exempl: 3.

Sit ED Conchoides Nichomedea, Polo G, Asymptoto AT et intervallo LD descripta.

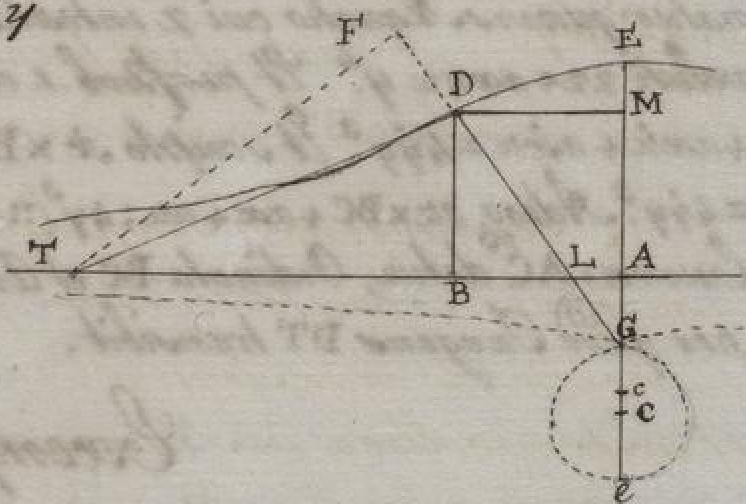
Sitq GA = b, LD = c, AB = x, & BD = y

Et propter similia Triangula DBL & DMG erit LB : BD :: DM : MG

$\sqrt{cc - yy} : y :: x : b + y$.

Adeoq $\overline{b + y} \times \sqrt{cc - yy} = yx$.

Nactus hanc Æquatione fingo $\sqrt{cc - yy} = z$. Et sic duas Æquationes, $bz + yz = yx$ et $zz = cc - yy$



habeo. Quarum ope Fluxiones Quantitatum x, y & z (per Prob. 1.) quæro, et e prima prodit $b\dot{z} + y\dot{z} + \dot{y}z = \dot{y}x + \dot{x}y$, ac e secunda $2\dot{z}z = -2\dot{y}y$ sive $\dot{z}z + \dot{y}y = 0$. E quibus exterminato $\dot{z}$ oritur

$-\frac{b\dot{y}y}{z} - \frac{\dot{y}yy}{z} + \dot{y}z = \dot{y}x + \dot{x}y$.

Quâ resolutâ fit $y : z - \frac{by}{z} - \frac{yy}{z} - x (:: \dot{y} : \dot{x}) :: BD : BT$. Cum ergo BD sit y, erit $BT = z - x \frac{-by - yy}{z}$. Hoc est $-BT = AL + \frac{BD \times GM}{BL}$. Ubi Signum − ipsi BT præfixum denotat punctum T ad partes adversus A capiendum esse.

Scholium

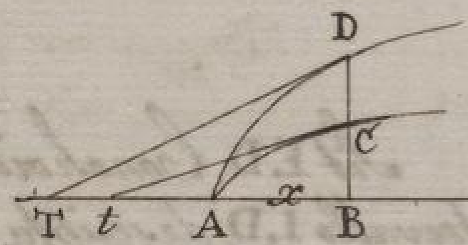
Scholium.

Et hinc obiter inventio puncti determinantis concavam et convexam partem Conchoidis prodit. Nempe cùm AT sit omnium Minima, erit D ejusmodi punctum. Esto itaq; $AT = v$, et cùm sit $BT = -z + x + \frac{by + yy}{z}$ erit $v = -z + 2x + \frac{by + yy}{z}$. Ubi (ad opus abbreviandum pro x substitue $\frac{bz + yz}{y}$ valorem e superioribus erutem, et fiet $\frac{2bz}{y} + z + \frac{by + yy}{z} = v$. Unde per Prob. 1. Fluxionibus $\dot{v}, \dot{y}, \& \dot{z}$ quæsitis et per Prob. 3 supposita $\dot{v} = 0$, emerget $\frac{2b\dot{z}}{y} - \frac{2b\dot{y}z}{yy} + \dot{z} + \frac{b\dot{y} + 2\dot{y}y}{z}$ ~ $- \frac{b\dot{z}y - \dot{z}yy}{zz} = (\dot{v} =) 0$. In hac deniq; substitue $\frac{-\dot{y}y}{z}$ pro $\dot{z}$, et $cc - yy$ pro zz (valores $\dot{z}$ et zz e superioribus petendos) et facta reductione obtinebitur $y^3 + 3by^2 - 2bc^2 = 0$. Cujus Æquationis constructione dabitur y sive AM; Et per M acta MD ipsi AB parallela incidet in punctum Flexus contrarij D.

Præterea si Curva Mechanica est cujus Tangentem ducere oportet quantitatum Fluxiones, ut in Exemplo 5. Prob. 1. quærendæ sunt, cæteraq; ut in præcedentibus peragenda.

Exempl. 4.

Sunto AC et AD duæ Curvæ quibus recta BCD ad Basin AB in dato Angulo applicata occurrit in C & D Et appellatur $AB = x$, $BD = y$ & $\frac{\text{Area } ACB}{1} = z$ et per Prob. 1. Præparat: ad Exemp. 5. erit $\dot{z} = \dot{x} \times BC$.



Jam sit AC Circulus aut Curva quævis nota et alteram Curvam AD definiendam exponatur quævis Æquatio cui z intexta est, veluti $zz + axz = y^4$. Et per Prob. 1. erit $2\dot{z}z + ax\dot{z} + a\dot{x}z = 4\dot{y}y^3$. Et scripto $\dot{x} \times BC$ pro $\dot{z}$ fiet $2\dot{x}z \times BC + a\dot{x}x \times BC + a\dot{x}z = 4\dot{y}y^3$. Adeoq; $2z \times BC + ax + az : 4y^3 (:: \dot{y} : \dot{x}) :: BD : BT$. Quamobrem si natura Curvæ AC detur, Ordinata BC et Area ACB sive z, dabitur punctum T, per quod Tangens DT transibit.

Exempl: 5.

Sit $AB = x$, $BD = y$, ut ante, et Curvæ cujusvis AC Longitudo sit z; ductaq; ad eam Tangente Ct, erit $Bt : Ct :: \dot{x} : \dot{z}$ sive $\dot{z} = \frac{\dot{x} \times Ct}{Bt}$.

Jam ad aliam Curvam AD cujus Tangens ducenda est, detur quælibet Æquatio in qua z involvitur, puta si $z = y$, erit $\dot{z} = \dot{y}$. Adeoq; $Ct : Bt (:: \dot{y} : \dot{x}) :: BD : BT$. Invento autem T age DT Tangentem.

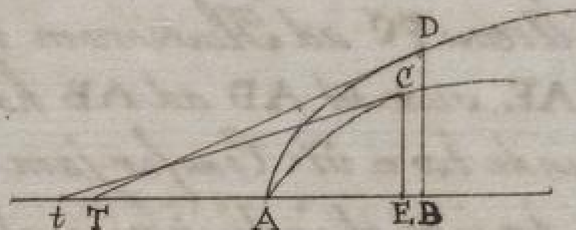
Sic posito $xz = yy$ erit $\dot{x}z + \dot{z}x = 2\dot{y}y$, et pro $\dot{z}$ scripto $\frac{\dot{x} \times Ct}{Bt}$, emerget $\dot{x}z + \frac{\dot{x}x \times Ct}{Bt} = 2\dot{y}y$. Quare est $z + \frac{x \times Ct}{Bt} : 2y :: BD : DT$.

Exempl.

Exempl. 6.

Sit AC. Circulus aut alia quavis nota Curva quam tangat Ct, et sit AD alia Curva cujus Tangentem DT ducere oportet, et quæ definitur assumendo AB = Arcui AC, et (CE, ac BD in dato Angulo ad AB Ordinatis) referendo BD ad CE vel AE in Æquatione aliqua.

Dic ergo AB vel AC = x, BD = y, AE = z, & CE = v et patet $\dot{v}, \dot{x}$ & $\dot{z}$ Fluxiones ipsarum CE, AC & AE esse inter se ut sunt CE, Ct, & Et. Adeoq; $\dot{x} \times \frac{CE}{Ct} = \dot{v}$ & $\dot{x} \times \frac{Et}{Ct} = \dot{z}$.



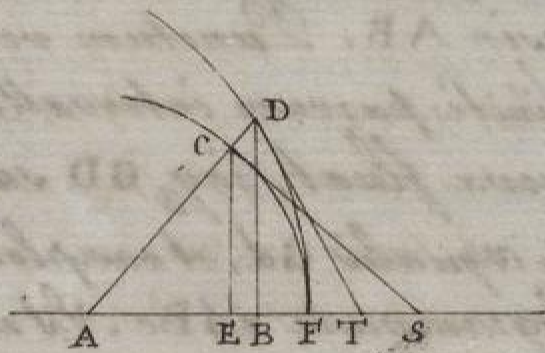
Detur jam quælibet Æquatio ad definiendam Curvam AD, veluti $y = z$ et erit $\dot{y} = \dot{z}$; Adeoq; Et : Ct (:: $\dot{y} : \dot{x}$) :: BD : BT.

Vel detur $y = z + v - x$, et erit $\dot{y} = (\dot{v} + \dot{z} - \dot{x} =) \dot{x} \times \frac{\overline{CE + ET - Ct}}{Ct}$ Adeoq; CE + Et − Ct : Ct (:: $\dot{y} : \dot{x}$) :: BD : BT.

Vel deniq; detur $ayy = v^3$, et erit $2a\dot{y}y (= 3\dot{v}v^2) = 3\dot{x}v^2 \times \frac{CE}{Ct}$, Adeoq; $3vv \times$ CE : $2ay \times$ Ct :: BD : BT.

Exempl: 7.

Sit FC Circulus quem tangat CS sitq; FD Curva quæ definitur assumendo quamvis relationem Applicatæ DB ad FC. Arcum quem DA ad Centrum ducta intercipit. Et demissa CE in Circulo applicata; dic AC vel AF = 1, AB = x, BD = y, AE = z, CE = v, CF = t; Et erit $\dot{t}z (= \dot{t} \times \frac{CE}{CS}) = \dot{v}$, & $-\dot{t}v (= \dot{t} \times \frac{-ES}{CS}) = \dot{z}$. Ubi pono $\dot{z}$ negativè quod AE diminuitur dum EC augetur. Est insuper AE : EC :: AB : BD, adeoq; $zy = vx$, et inde per Prob. 1. $\dot{z}y + \dot{y}z = \dot{v}x + \dot{x}v$. Et hæc, exterminatis $\dot{v}, \dot{z}$ & v, faciunt $\dot{y}x - \dot{t}y^2 - \dot{t}x^2 = \dot{x}y$.



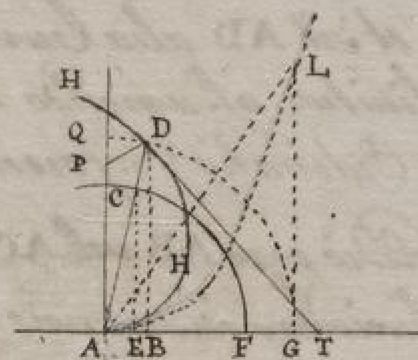
Definiatur jam Curva DF. Æquatione quavis a qua valor $\dot{t}$ hic substituendus deduci possit: puta sit $t = y$ (Æquatio ad primam Quadraticem) et per Prob. 1. erit $\dot{t} = \dot{y}$. Adeoq; $\dot{y}x - \dot{y}y^2 - \dot{y}x^2 = \dot{x}y$. unde $y : xx + yy - x$ (:: $\dot{y} : -\dot{x}$) :: BD (y) : BT. Quare BT = $x^2 + y^2 - x$. Et AT = $xx + yy = \frac{\overline{AD}^2}{AF}$.

Ad eundem modum si sit $tt = by$, proveniet $2\dot{t}t = b\dot{y}$. Et inde AT = $\frac{b}{2t} \times \frac{\overline{AD}^2}{AF}$. Et sic in alijs.

Exemp.

Exempl. 8.

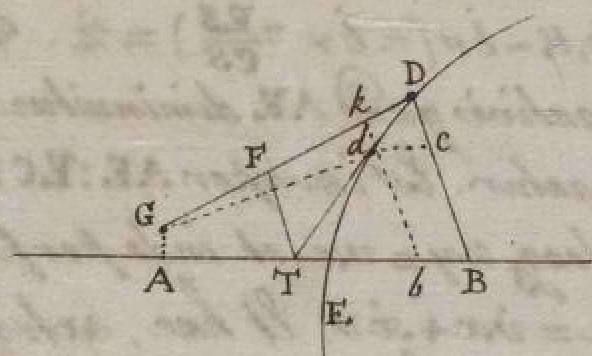
Quod si AD sumatur æqualis Arcui FC existente ADH Spirali Archimedea, tum stantibus jam positis linearum nominibus, est (propter Ang. ABD rect.) $xx + yy = tt$. Et inde (per Prob. 1) $\dot{x}x + \dot{y}y = t\dot{t}$. Est etiam AD : AC :: DB : CE, adeoque $tv = y$, et inde per Prob. 1, $t\dot{v} + \dot{v}t = \dot{y}$. Denique est Arcus FC ad Fluxionem rectæ CE, ut AC ad AE, sive ut AD ad AB hoc est $\dot{t} : \dot{v} :: t : x$, et inde $t\dot{x} = \dot{v}t$. Confer jam inventas Æquationes et videbis esse $t\dot{v} + t\dot{x} = \dot{y}$, et inde $\dot{x}x + \dot{y}y \, (= t\dot{t}) = \frac{\dot{y}t}{v+x}$. Atque adeo (completo Parallelogrammo ABDQ) si fiat QD : QP (:: BD : BT :: $\dot{y} : -\dot{x}$) :: $x : y - \frac{t}{v+x}$, hoc est si capiatur $AP = \frac{t}{v+x}$, erit PD ad Spiralem perpendicularis.



Ex his opinor satis manifestum est quo pacto Curvarum omnium Tangentes ducendæ sunt. Attamen non abs re erit si præterea confectionem Problematis ubi Curvæ alijs quibuscunque modis ad rectas referuntur ostendero, ut e pluribus Methodis facillima et simplicissima semper possit adhiberi.

Modus 2.

Sit D punctum in Curva a quo subtensa DG ducitur ad datum punctum G ac DB in dato quovis Angulo ordinatur ad Basin AB. Punctum verò D per infinitè parvum intervallum Dd in Curva fluat, inque GD sumatur GK æqualis Gd, et compleatur Parallelogrammum dbBc. Et erunt Dk ac Dc contemporanea momenta ipsarum GD & BD quibus nempe diminuuntur dum D transfertur ad d. Jam Dd rectà producatur donec cum AB conveniat in T et ab isto T ad Subtensam GD demittatur perpendiculum TF et erunt Trapezia Dcdk ac DBTF similia adeoque DB : DF :: DC : Dk.



Cum itaque relatio BD ad GD in Æquatione qualibet pro Curva definienda exponitur, quære relationem Fluxionum et cape FD ad DB in ratione Fluxionis GD ad Fluxionem BD. Dein ab F erige perpendiculum FT, quod cum AB concurrat in T, et acta TD Curvam Tanget in D. Cape autem DF versus G si sit affirmativa; sin secus, cape ad contrarias partes.

Exempl. 1.

Dic GD $= x$ & BD $= y$, & esto earum relatio $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Eritq; Fluxionum ratio $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$. Atq; adeò $3xx - 2ax + ay : 3yy - ax \,(:: \dot{x} : \dot{y}) ::$ DB (y) : DF. Esto ergo DF $= \frac{3y^3 - axy}{3x^2 - 2ax + ay}$. Adeoq; dato quolibet in Curva puncto D, et inde BD & GD sive y & x, dabitur punctum F: Unde si normalem FT erigui, ad ejus concursum cum Basi AB ducta DT Curvam tanget.

Et hinc patet Regulam perinde ac in priori casu concinnari posse: Scilicet Æquationis expositæ terminos omnes ad easdem partes dispone, et dimensiones Ordinatæ y multiplica, et exitum colloca in Numeratore; Dein terminos ejus sigillatim per Dimensiones subtensæ x multiplica, et exitum per subtensam illam x divisum colloca in Denominatore valoris DF. Illamq; DF cape ad partes contra G si sit affirmativa, sin secus, cape ad easdem partes. Et nota quod nihil intersit quanto intervallo punctum G distat a Basi AB, si forte distat neq; quinam sit Angulus Ordinationis ABD.

Sic Æquatio superior $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, prima fronte dat $axy - 3y^3$ pro Numeratore, et $3x^2 - 2ax + ay$ pro Denominatore valoris DF.

Sic etiam $a + \frac{b}{a}x - y = 0$ (quæ Æquatio est ad Conicam Sectionem) dat $-y$ pro Numeratore et $\frac{b}{a}$ pro Denominatore valoris DF quæ ideo erit $= \frac{-ay}{b}$.

Et sic in Conchoide (ubi res expeditiùs obsolvitur quàm ante) posito GA $= b$, LD $= c$, GD $= x$, et BD $= y$ (vid. fig. Ex. 3. Mod. 1.) erit BD : DL :: GA : GL.
$y : c :: b : x - c$
Adeoq; $xy - cy = cb$, sive $xy - cy - cb = 0$. Quæ Æquatio juxta Regulam dat $\frac{xy - cy}{y}$ hoc est $x - c =$ DF. Produc ergo GD ad F ut sit DF $=$ LG, et ad F erige normalem FT occurrentem Asymptoto AB in T, et acta DT Conchoidem Tanget.

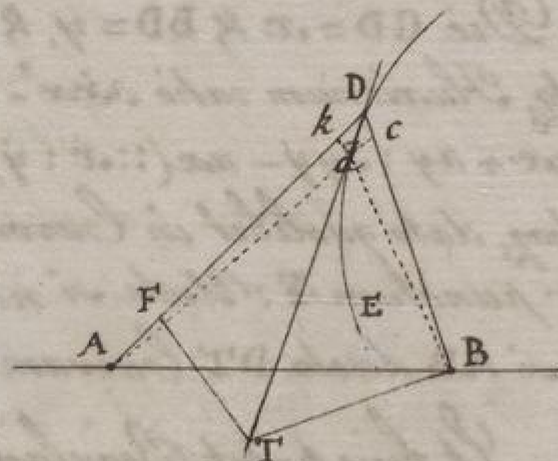
Siquando compositæ quantitates in Æquatione reperiantur ad Methodum generalem recurrendem est, nisi ubi malueris Æquationem reducere.

Exempl. 2.

Si detur Æquatio $\overline{b + x} \times \sqrt{cc - yy} = yx$ pro relatione inter GD et BD (Fig. præced.) determinanda, fluxionum relationem juxta Prob. 1. quære: Utpote ficto $\sqrt{cc - yy} = z$, Æquationes $bz + yz = yx$, et $cc - yy = zz$ habebis, et inde fluxionum $\dot{x}$, $\dot{y}$ & $\dot{z}$ relationes $b\dot{z} + y\dot{z} + \dot{y}z = \dot{y}x + y\dot{x}$, et $-2\dot{y}y = 2\dot{z}z$. Et exterminatis $\dot{z}$ & z orietur $\dot{y}\sqrt{cc - yy}\ \frac{-b\dot{y}y - \dot{y}y^2}{\sqrt{cc - yy}} - \dot{y}x = \dot{x}y$. Est ergo $\dot{y} : \sqrt{cc - yy}\ \frac{-by - yy}{\sqrt{cc - yy}} - x \,(:: \dot{y} : \dot{x}) ::$ BD (y) : DF.

Modus 3.

Præterea si Curva ad duas subtensas AD & BD referatur quæ a datis punctis A ac B ductæ ad Curvam conveniunt: Concipe punctum illud D per infinite parvum spatium Dd in Curva profluere, Et in AD & BD cape Ak = Ad et Bc = Bd. Et erunt kD & cD contemporanea momenta Linearum AD & BD. Cape jam DF ad BD in ratione momenti Dk ad momentum Dc (i.e. in ratione Fluxionis lineæ AD ad Fluxionem lineæ BD) et erige perpendicula BT, FT concurrentia in T; eruntq; Trapezia DFTB ac Dkdc similia, et proinde Diagonales DT Curvam tanget.



Per Æquationem itaq; qua relatio inter AD & BD definitur quære relationem Fluxionum ope Prob. 1. et cape FD ad BD in eadem ratione.

Exempl.

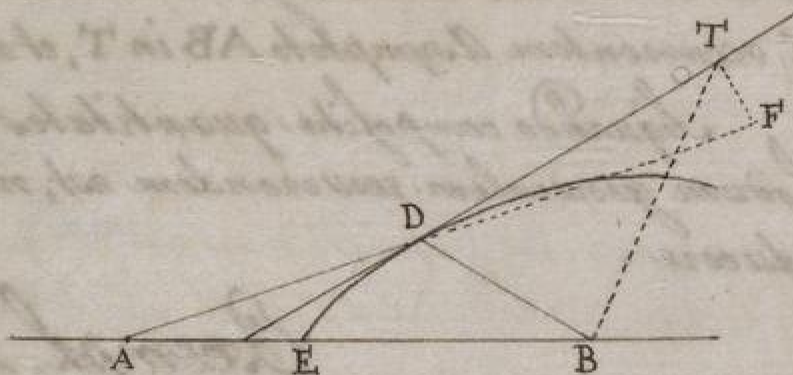
Posito AD = x & BD = y, sit earum relatio $a + \frac{ex}{d} - y = 0$ (quæ Æquatio est ad Ellipses secundi generis quarum proprietatis ad Lucem refringendam Des-Cartes in Lib: 2. Geometriæ docuit)

Et Fluxionum relatio erit $\frac{e\dot{x}}{d} - \dot{y} = 0$. Est itaq; $e : d (:: \dot{y} : \dot{x}) ::$ BD : DF.

Et pari ratione si $a - \frac{ex}{d} - y = 0$, erit $e : -d ::$ BD : DF. In priori casu, cape DF versus A, et ad contrarias partes in posteriori.

Corol. 1.

Hinc si $d = e$ (quo casu Curva evadit Conica sectio) erit DF = DB. Et inde Triangula DFT, DBT æqualia Angulusq; FDB a Tangenti bisecabitur.



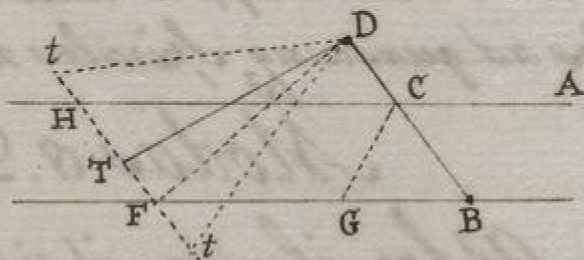
Coroll: 2.

Hinc etiam quæ Des Cartes de his Curvis circa Refractiones haud absq; circuitu demonstravit, per se manifesta sunt: Siquidem DF ac DB (quæ sunt in data ratione d ad e) respectu Sinus toti DT sint Sinus Angulorum DTF, ac DTB, id est Incidentiæ radij AD in superficiem Curvæ, et Reflectionis vel Refractionis ejus DB. Estq; par ratio de Refractionibus Conicarum Sectionum si modo punctorum A vel B alterutrum infinite distare concipiatur.

Perfacile est hanc Regulam pro more præcedentium concinnare et pluribus exemplis donare. Quinimò ubi Curvæ alijs quibuscunq; modis ad rectas referuntur et ad præcedentes formas haud commodè reduci possunt, perfacile est alias Regulas ad harum Exemplar pro re nata excogitare.

Modus 4.

Quemadmodum si rectæ BD circa datum punctum B volventis punctum D sit ad Curvam aliquam, et C, sit intersectio ejus cum rectâ AC, positione datâ; habeaturq relatio inter BC & BD quæcunq Æquatione designata; Age BF parallelam AC, eiq occurrat DF normalis ad BF. Et ad DF ibidem erige normalem FT, et cape in ratione ad BC quam habet Fluxio ipsius BD ad Fluxionem ipsius BC: Actaq DT Curvam tanget.



Modus 5.

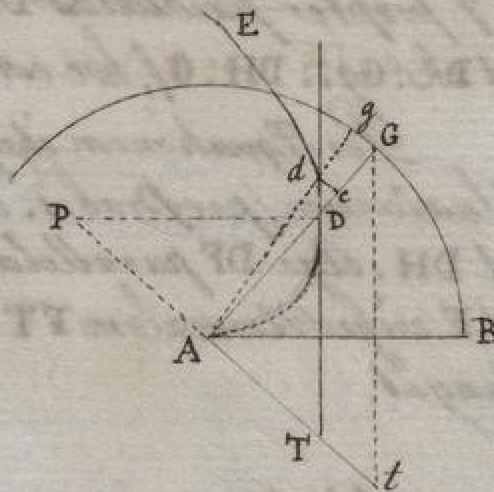
Sin, dato puncto A, Æquatio relationem inter AC et BD designat duc CG parallelam DF, et cape FT in ratione ad BG quam habet Fluxio BD ad Fluxionem AC.

Modus 6.

Vel deniq si Æquatio relationem inter AC & CD definit: conveniant AC & FT in H, et cape HT in ratione ad BG quam habet Fluxio CD ad Fluxionem AC. Et sic in aliis.

Modus 7. De Spiralibus.

Haud secus absolvitur Problema ubi Curvæ non ad rectas sed ad alias Curvas lineas (uti solent Mechanicæ) referuntur. Sit BG Circuli peripheria in cujus Semidiametro AG dum circa centrum A convolvitur, moveatur utcunq punctum D, et Spiralem ADE describat. Et concipe Dd et partem Curvæ infinitè parvam per quam D fluit, et in AD cape Ac = Ad, et erunt cD ac Gg contemporanea momenta rectæ AD et peripheriæ BG. Duc ergo At ∥$^{\text{m}}$ cD, i.e. ⊥$^{\text{rem}}$ AD, et cum ea Tangens DT conveniat in T. Eritq cD : cd :: AD : AT, sit insuper Gt parallela Tangenti, et erit cd : Gg (:: Ad vel AD : AG :: AT : At.



Quare exposita quacunq Æquatione quâ relatio BG ad AD definitur, quære relationem fluxionum per Prob. 1. et cape At in illa ratione ad AD. Eritq Gt Tangenti parallela.

Exempl. 1.

Dictis BG = x, & AD = y, sit earum relatio $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Et ope Prob. 1. emerget $3x^2 - 2ax + ay : 3yy - ax (:: \dot{y} : \dot{x}) ::$ AD : At :: AP : AG. Puncto t sic invento duc Gt eiq parallelam DT, et illam Curvam tanget.

Exempl: 2.

Si sit $\frac{ax}{b} = y$ (quæ Æquatio est ad Spiralem Archimedeam) erit $\frac{a\dot{x}}{b} = \dot{y}$, Adeoq; $a : b$ (:: $\dot{y} : \dot{x}$) :: AD : At. Unde obiter si TA producatur ad P, ut sit AP : AB :: $a : b$, PD ad Curvam recta erit.

Exempl: 3.

Si $xx = by$, erit $2\dot{x}x = b\dot{y}$, Adeoq; $2x : b$ :: AD : At. Et sic Tangentes ad quascunq; Spirales nullo negotio determinari possunt.

Modus 8. De Quadraticibus.

Ad hæc si Curva, sit ejusmodi ut per Centrum A ducta utcunq; AGD quæ Circulo in G Curvæq; in D occurrat relatio inter Arcum BG et rectam DH quæ in dato Angulo ad Basin AB Ordinata est, Æquatione quavis definiatur: Concipe punctum D per infinite parvum intervallum ad d in Curva moveri, et completo parallelogrammo $dhHk$, productaq; Ad ad c ut sit Ac = AD, erunt Gg Arcus BG et Dk Ordinatæ DH contemporanea momenta. Produc jam Dd rectà ad T ubi cum AB conveniat, et demitte TF in Dc perpendicularum, eruntq; Trapezia Dkdc, DHTF similia: atq; adeo Dk : Dc :: DH : DF. Et præterea si Gf ad AG normalis, erigatur quæ cum AF concurrat in f propter parallelas DF, Gt, erit Dc : GS :: DF : Gf. Quamobrem ex æquo et Dk : Gg :: DH : Gf, hoc est ut momenta sive Fluxiones linearum DH et BG.

Per Æquationem itaq; quâ relatio BG ad DH definitur quære relationem Fluxionum (per Prob. 1. et in ea ratione cape Gf (Tangentem Circuli BG) ad DH. Age DF parallelam Gf quæ cum Af producta conveniat in F. Et ad F erige Normalem FT occurrentem AB in T, et acta DT Quadraticem tanget.

Exempl. 1.

Nominatis BG = x, ac DH = y, esto $xx = by$, Et per Prob. 1) erit $2\dot{x}x = b\dot{y}$. Adeoq; $2x : b$ (:: $\dot{y} : \dot{x}$) :: DH : GF. Et invento f, cætera ut præscriptum est determinabis.

Cæterum hæc Regula forte sic elegantior evadet, fac $\dot{x} : \dot{y}$ :: AB : AL. Dein AL : AD :: AD : AT, et DT Curvam tanget. Nam propter æqualia triangula AFD, ATD, est AD×DF = AT×DH. Adeoq; AT : AD (:: DF : DH, sive $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ Gf) :: AD : $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ AG, sive AL.

Exempl: 2.

Esto $x = y$ (quæ Æquatio est ad Veterum Quadraticem) et per Prob. 1, $\dot{x} = \dot{y}$. Adeoq; AB : AD :: AD : AT.

Exempl: 3.

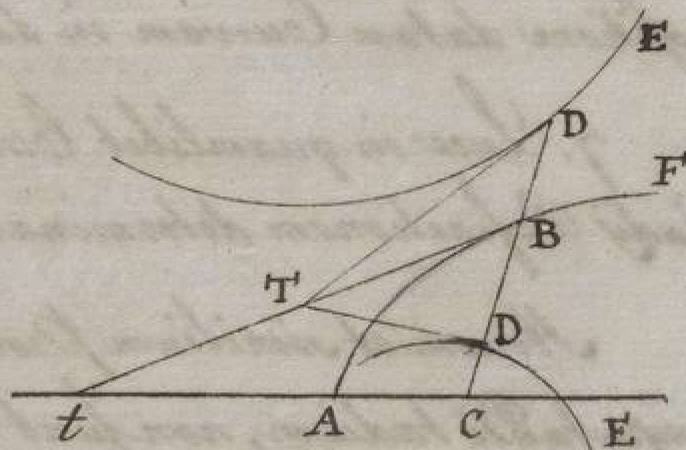
Esto $axx = y^3$, et erit $2a\dot{x}x = 3\dot{y}y^2$. fac ergo $3y^2 : 2ax$ (:: $\dot{x} : \dot{y}$) :: AB : AL. Dein AL : AB :: AD : AT.

Atq; ita Tangentes aliarum Quadraticum utcunq; compositarum possis expedite determinare.

Modus

Modus 9.

Si denique ABF sit Curva quævis data quam Tangat recta Bt, et rectæ BC in dato Angulo ad Basin AC applicatæ pars BD inter hanc et aliam Curvam DE intercepta relationem ad Curvæ portionem AB in Æquatione quacunque definitam habeat: alterius Curvæ Tangentem BT duces capiendo in hujus Tangente BT in ea relatione ad BD, quam habet Fluxio Curvæ AB ad Fluxionem rectæ BD.



Exempl: 1.

Dictis AB $=x$, et BD $=y$, esto $ax=yy$, et per Prob. 1. erit $a\dot{x}=2\dot{y}y$ adeoque $a:2y(::\dot{y}:\dot{x})::$ BD : BT.

Exempl. 2.

Sit $\frac{a}{b}x=y$ (Æquatio ad Trochoidem si modò ABF sit Circulus) et erit $\frac{a}{b}\dot{x}=\dot{y}$ Adeoque $a:b::$ BD : BT.

Et nihilo difficilius Tangentes, ubi ipsius BD ad AC vel ad BC relatio in Æquatione quavis exprimitur vel ubi Curvæ alijs quibuscunque modis ad rectas aliasve Curvas referuntur, possis ducere.

Sunt etiam alia non pauca Problemata quorum Solutiones ex hisce fluent. Cujusmodi sunt.

1. Invenire punctum Curvæ ubi Tangens est ad Basin (vel quamvis positione datam rectam) Parallela vel Perpendicularis vel in alio quovis Angulo inclinata.

2. Invenire punctum ubi Tangens Maximè Minimève ad Basin, aut aliam positione datam rectam inclinatur: Hoc est invenire confinium Flexûs Contrarij. Hujus autem Specimen in Conchoide jam ante exhibui.

3. A dato quovis extra Curvæ Perimetrum puncto rectam ducere quæ cum Perimetro aut Angulum contactûs aut rectum Angulum, aut alium quemvis datum conficiet: Hoc est, Tangentes vel Perpendiculares vel aliter ad Curvam inclinatas rectas a dato quovis puncto ducere.

4. A dato quovis intra Parabolam puncto rectam ducere quæ Maximum Minimumve quem potest Angulum cum Perimetro ejus conficiet. Et idem de alijs Curvis intellige.

5 Rectam

5. Rectam ducere quæ duas positione datas Curvas, vel eandem Curvam (si potest) in duobus punctis tanget.

6. Curvam quamvis sub datis conditionibus ducere quæ aliam positione datam Curvam in dato puncto tanget.

7. Luce in quamlibet Curvam Superficiem incidente cujusvis Radij Refractionem determinare.

Horum et similium Problematum confectiones ubi non obstat computandi tædium, non sunt ita difficiles ut ijs explicandis immorari opus sit. Et Geometris, credo, magis gratum erit sic tantum recensuisse.

Prob: 5.

Curvæ alicujus ad datum punctum Curvaturam invenire.

Problema cum primis elegans videtur et ad Curvarum Scientiam utile. In ejus autem constructionem generalia quædam præmittere convenit.

1. Ejusdem Circuli eadem estq undiq Curvatura et inæqualium Circulorum reciprocè proportionales Diametris: Si alicujus Diameter Diametro alterius duplo minor est, ejus Periphæriæ Curvatura erit duplo major; si Diameter triplo minor est Curvatura erit triplo major, &c.

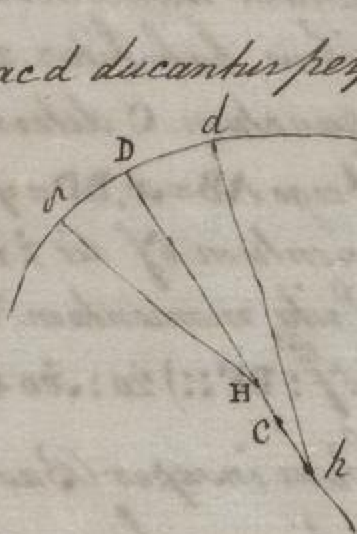
2. Si Circulus Curvam aliquam ad partem concavam in dato puncto tangat sitq talis magnitudinis ut alius contingens Circulus in Angulis contactûs proximè punctum istud interscribi nequeat, Circulus ille ejusdem est Curvitatis ac Curva in isto puncto contactûs. Nam Circulus qui inter Curvam et alium Circulum juxta punctum contactûs interjacet, minus deflectit a Curva ejusq Curvaturam magis appropinquat quam ille alius Circulus. Et proinde curvaturam ejus maximè appropinquat inter quem et Curvam non alius quisquam potest intercedere.

3. Itaq Centrum curvaminis ad aliquod Curvæ punctum est Centrum tangentis Circuli æqualiter incurvatæ. Et sic radius vel semidiameter Curvaminis est pars perpendiculi ad istud Centrum terminata.

4. Et proportio Curvaminis ad diversa ejus puncta e proportione curvaminis Circulorum æque curvarum sive e reciproca proportione radiarum curvaminis innotescit.

Problema itaq ad hunc locum redijt ut Radius vel Centrum Curvaminis inveniatur.

Concipe ergo quod ad tria Curvæ puncta δ D ac d ducantur perpendicula quarum quæ sunt ad D & δ conveniant in H; et quæ ad D & d conveniant in h. Et puncto D existente medio si major est curvitas a parte Dδ quam Dd, erit DH ⊐ dh. Sed quo perpendicula δH ac dh propiora sunt intermedio perpendiculo, eo minus distabunt puncta H & h. Et convenientibus tandem perpendiculis coalescent. Coalescant autem in puncto C et erit illud C centrum curvaminis ad Curvæ punctum D cui perpendicula insistunt. Id quod per se manifestum est.



Hujus autem C varia sunt Symptomata quæ ad ejus determinationem inservire possunt: Quemadmodum

1. Quod sit concursus perpendiculorum hinc et inde a DC infinitè parvum distantium.

2. Quod perpendiculorum finitè parium distantium intersectiones hinc et inde dirimit ac disterminat. Ita ut quæ sunt a parte curviori Dδ citiùs ad H conveniant, et quæ sunt ex alterâ minus Curvâ parte Dδ remotius conveniant ad h.

3. Si

3. Si DC dum Curvæ perpendiculariter insistat moveri concipiantur illud ejus punctum C (si demas motum accedendi vel recedendi a puncto insistentiæ C) minimè movebitur sed Centri motionis rationem habebit.

4. Si Centro C intervallo DC Circulus describatur non potest alius describi Circulus qui juxta contactum interjacebit.

5. Deniq; si alterius alicujus Tangentis Circuli Centrum ut H vel h paulatim ad hujus Centrum C accedat donec tandem conveniat, tunc aliquod e punctis in quibus Circulus ille Curvam secavit simul conveniet punctum contactûs D.

Et unumquodq; horum Symptomatum ansam præbet diversimodè resolvendi Problema. Nos autem primum tanquam simplicissimum eligemus.

Ad quodlibet Curvæ punctum D, esto DT tangens, DC perpendiculum et C Centrum curvaminis ut ante.

Sitq; AB Basis ad quam DB in angulo recto applicatur, et cui DC occurrit in P. Age DG parallelam AB, Et CG perpendiculum inq; eo cape Cg cujuslibet datæ magnitudinis et age gδ perpendiculum quod occurrat DC in δ. Eritq; Cg : gδ :: (TB : BD ::) Fluxio Basis : Fluxionem Applicatæ. Concipe præterea punctum D per infinitè parvum intervallum Dd in Curva promoveri, et actis de ad DG et Cd ad Curvam normalibus quarum Cd occurrit DG in F et δg in f; erit De momentum Basis de momentum Applicatæ, ac δf contemporaneum momentum rectæ gδ. Estq; $DF = De + \frac{de \times de}{De}$. Habitis itaq; horum momentorum sive quod perinde est Fluxionum generantium rationibus, habebitur ratio GC ad datam gC (quippe quæ est DF ad δf) et inde punctum C determinabitur.

Sit ergo $AB = x$, $BD = y$, $CG = 1$; Et $g\delta = z$, et erit $1 : z :: \dot{x} : \dot{y}$ seu $z = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, hujus autem z momentum δf dic $\dot{z} \times o$ (factum nempe ex velocitate et infinite parva quantitate) Eritq; momentum $De = \dot{x} \times o$, $de = \dot{y} \times o$, et inde $DF = \dot{x}o + \frac{\dot{y}\dot{y}o}{\dot{x}}$. Est ergo $CG\ (1) : CG :: (\delta f : DF ::)\ \dot{z}o : \dot{x}o + \frac{\dot{y}\dot{y}o}{\dot{x}}$. Adeoq; $CG = \frac{\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y}}{\dot{x}\dot{z}}$

Cùm insuper Basis fluxioni $\dot{x}$ (ad quam tanquam uniformam fluxionem cæteras referre convenit) liberum sit quacunq; velocitatem tribuere; dic esse 1, Et erit $\dot{y} = z$ & $CG = \frac{1 + zz}{\dot{z}}$. Et inde $DG = \frac{z + z^3}{\dot{z}}$ ac $DC = \frac{\overline{1 + zz}\sqrt{1 + zz}}{\dot{z}}$

Expositâ itaq; quâvis Æquatione quâ relatio BD ad AB, pro Curvâ definienda designetur, imprimis quære relationem inter $\dot{x}$ & $\dot{y}$ per Prob: 1. et interea substitue 1 pro $\dot{x}$ & z pro $\dot{y}$. Dein ex Æquatione resultante per idem Prob. 1. quære relationem inter x, y & z, et interea substitue 1 pro $\dot{x}$ & z pro $\dot{y}$. ut ante. Atq; ita per priorem operationem obtinebis valorem z & per posteriorem obtinebis valorem $\dot{z}$; quibus habitis, produc DB ad H versus

versus concavam partem Curvæ ut sit $DH = \frac{1+zz}{\dot{z}}$, et age HC parallelam AB et perpendiculo DC occurrentem in C, eritq C Centrum curvaturæ ad Curvæ punctum D vel cùm sit $1+zz = \frac{PT}{BP}$, fac $DH = \frac{PT}{\dot{z}\times BP}$, vel $DC = \frac{\overline{DP}^3}{\dot{z}\times \overline{DB}^3}$.

Exemp. 1.

Sic exposita $ax+bx^2-y^2=0$ (Æquatione ad Hyperbolam cujus Latus rectum est a, ac Transversum $\frac{a}{b}$) emerget (Prob. 1.) $a+2bx-2zy=0$ (scriptis nempe 1 pro $\dot{x}$ & z pro $\dot{y}$ in Æquatione resultante, quæ secus foret $a\dot{x}+2b\dot{x}x-2y\dot{y}=0$). Et hinc denuo prodit $2b-2zz-2\dot{z}y=0$, scriptis iterum 1 pro $\dot{x}$ & z pro $\dot{y}$. Per priorem est $z=\frac{a+2bx}{2y}$ et posteriorem $\dot{z}=\frac{b-zz}{y}$. Dato itaq quovis Curvæ puncto D et consequentiam x & y, ex his dabuntur z & $\dot{z}$ quibus cognitis fac $\frac{1+zz}{\dot{z}} = GC$ vel DH, et age HC.

Quemadmodum si definitè sit $a=3$, & $b=1$, adeoq $3x+xx=yy$, Hyperbolæ conditio: Et si assumatur $x=1$, erit $y=2$, $z=\frac{5}{4}$, $\dot{z}=-\frac{9}{32}$, & $DH=-9\frac{1}{9}$. Invento H, erige HC occurrentem perpendiculo DC priùs ducto, vel quod perinde ut fac HD:HC (:: 1 : z) :: 1 : $\frac{5}{4}$, at age DC Curvaminis Radium.

Siquando computationem non admodum perplexam fore censeas, possis indefinitos valores ipsorum $\dot{z}$ & z in $\frac{1+zz}{\dot{z}}$ valore CG substituere. Et sic in hoc Exemplo per debitam reductionem obtinebis $DH = y+\frac{4y^3+4by^3}{aa}$. Cujus tamen DH valor per calculum negativus prodit sicut in Exemplo numerali videre est. At hoc tantùm arguit DH at partes versus B capiendum esse. Nam si fuisset affirmativus ad contrarias partes duxisse oporteret.

Corol:

Hinc Signum Symbolo + b præfixum mutetur, ut fiat $ax-bxx-yy=0$ (Æquatio ad Ellipsin;) erit $DH=y+\frac{4y^3-4by^3}{aa}$.

At posito $b=0$, ut Æquatio fiat $ax-yy=0$, ad Parabolam; erit $DH=y+\frac{4y^3}{aa}$. Indeq $DG=\frac{1}{2}\,a+2x$.

Ex hisce facilè colligitur Radium Curvaturæ cujusvis Conicæ Sectionis valere $\frac{4\overline{DP}^3}{aa}$.

Exempl: 2.

Si $x^3=ay^2-xy^2$ (Æquatio ad Cissoidem Dioclis) exponatur; Per Prob: 1. imprimis obtinebitur $3x^2=2azy-2xzy-yy$; ac deinde $6x=2a\dot{z}y+2azz-2zy-2x\dot{z}y-2xzz-2zy$. Adeoq $z=\frac{3xx+yy}{2ay-2xy}$, Et $\dot{z}=\frac{3x-az^2+2zy+xz^2}{ay-xy}$. Dato itaq quolibet Cissoidis puncto et inde x & y, dabuntur z & $\dot{z}$: Quibus cognitis fac $\frac{1+zz}{\dot{z}}=CG$.

Exempl: 3

Si detur $\overline{b+y}\sqrt{cc-yy}=xy$ Æquatio ad Conchoidem ut supra; finge $\sqrt{cc-yy}=v$ et emerget $bv-yv=xy$. Jam harum prior (viz $cc-yy=vv$) per Prob. 1. dat $-2yz=2\dot{v}v$ (scripto nempe z pro $\dot{y}$) et posterior dat $b\dot{v}+y\dot{v}+zv=y+az$. Et ex his Æquationibus rite dispositis determinantur $\dot{v}$ & z. At autem $\dot{z}$ præterea determinetur, e novissimâ Æquatione extermina Fluxionem $\dot{v}$ substituendo $\frac{-yz}{v}$, et emerget $-\frac{byz}{v}-\frac{yyz}{v}+zv=y+xz$, Æquatio quæ Fluentes quantitates sine aliquibus earum fluxionibus (prout exigit resolutio Prob. 1) complectitur. Hinc itaq per Prob. 1. elicies $-\frac{bz^2}{v}-\frac{by\dot{z}}{v}+\frac{byz\dot{v}}{vv}-\frac{2yzz}{v}-\frac{yy\dot{z}}{v}+\frac{yyz\dot{v}}{vv}+\dot{z}v+z\dot{v}=2z+x\dot{z}$. Qua Æquatione in ordinem redactâ et concinnatâ, dabitur $\dot{z}$. Inventis autem z & $\dot{z}$, fac $\frac{1+zz}{\dot{z}}=CG$.

Si

Si penultimam Æquationem per z divisisses, exinde post modum per Prob: 1. obtinuisses $-\frac{bz}{v}+\frac{by\dot{v}}{vv}-\frac{2yz}{v}+\frac{yy\dot{v}}{vv}+\dot{v}=2-\frac{y\dot{z}}{zz}$, Æquationem priori simpliciorem pro determinando $\dot{z}$.

Dedi quidem hoc Exemplum ut modus operandi in Surdis Æquationibus constaret. At Conchoidis Curvatura sic brevius invenire potuit. Æquationis $\overline{b+y}\sqrt{cc-yy}=xy$, partibus quadratis et per yy divisis, exurgit $\frac{bbcc}{yy}+\frac{2bcc}{y}+\frac{cc}{-bb}-2by-yy=xx$; Et inde per Prob: 1. exoritur $-\frac{2b^2c^2z}{y^3}-\frac{2bc^2z}{y^2}-2bz-2yz=2x$. Sive $-\frac{b^2c^2}{y^3}-\frac{bc^2}{y^2}-b-y=\frac{x}{z}$. Et hinc denuo per Prob: 1. exoritur $\frac{3b^2c^2z}{y^4}+\frac{2bc^2z}{y^3}-z=\frac{1}{z}-\frac{x\dot{z}}{zz}$. Per priorem exitum determinatur z, et per posteriorem $\dot{z}$.

Exempl: 4.

Sit ADF Trochois ad Circulum ALE (cujus Diameter est AE) accommodata; et Ordinata BD secante Circulum in L. dic $AE=a$, $AB=x$; $BD=y$, $BL=v$, et arc $AL=t$, ejusque arcus fluxionem dic $\dot{t}$. Et imprimis (ducto PL semidiametro) erit fluxio Basis AB ad fluxionem Arcus AL ut BL ad PL; hoc est $\dot{x}$ sive $1:\dot{t}::v:\frac{1}{2}a$. Atque adeo $\frac{a}{2v}=\dot{t}$.

Porro ex Natura Circuli est $ax-xx=vv$. Et inde per Prob: 1, $a-2x=2\dot{v}v$ sive $\frac{a-2x}{2v}=\dot{v}$.

Adhæc ex Natura Trochoidis est $LD=\text{Arc } AL$; adeoque $v+t=y$. Et inde per Prob: 1. $\dot{v}+\dot{t}=z$.

Denique pro fluxionibus $\dot{v}$ & $\dot{t}$ valores hic substituantur, et emerget $\frac{a-x}{v}=z$. unde per Prob. 1. deducitur $-\frac{a\dot{v}}{vv}+\frac{x\dot{v}}{vv}-\frac{1}{v}=\dot{z}$. Et his inventis fac $\frac{1+zz}{\dot{z}}=-DH$, et erige HC.

Corrol: Cæterum ex his consectatur.

1. Quod sit $DH=2BL$, & $CH=2BE$, sive quod EF in N bisecat, CD Radium Curvaminis. Et hoc patebit, substituendo valores $\dot{z}$ & z jam inventos in Æquatione $\frac{1+zz}{\dot{z}}=DH$, et exitum probe reducendo.

2. Hinc Curva FCK in qua Centrum Curvaminis indefinite versatur est alia huic æqualis Trochois cujus vertices ad I & F adjacent hujus cuspidibus. Nam Circulus $F\lambda$ æqualis ALE et similiter positus, describatur et agatur CB parallela EF circuloque occurrens in λ: Et erit arc $F\lambda$ (= arc EL = NF) = $C\lambda$.

3. CD quæ recta est ad Trochoidem IAF, contingit Trochoidem IKF in C.

4. Hinc (inversis Trochoidibus) si superioris Trochoidis cuspidi K pondus ad distantiam KA sive 2EA filo appensum innitatur et undulante pondere filum se applicet ad Trochoidis partes KF & KI hinc inde obsistentes ne in rectum distendatur, et cogentes ut ad earum normam dum digreditur a perpendiculo paulatim de-

super

desuper inflectatur parte CD sub infimo contactûs puncto manente rectâ: pondus in inferioris Trochoidis Perimetro movebitur utpote cui filum CD semper perpendiculare est.

5. Est itaq; tota fili longitudo KA æqualis Perimetro Trochoidis KCF, ejusq; pars CD æqualis parti Perimetro CF.

6. Cum filum circa mobile punctum C tanquam Centrum undulendo convolvitur; superficies per quam tota CD continuò trajicitur erit ad Superficiem per quam pars CN supra rectam IF simul trajicitur ut CD^2 ad CN^2 hoc est ut 4 ad 1. Est itaq; Area CFN quarta pars Areæ CFD, et Area KCNE quarta pars Areæ ACDB.

7. Quinimò cum subtensa EL sit æqualis & parallela CN et circa immobile Centrum E perinde ac CN circa Mobile Centrum C circumagitur, æquales erunt Superficies per quas simul trajiciuntur nempe Area CFN et Circuli Segmentum EL. Et inde Area NFD tripla erit Segmenti istius, ac tota EADF tripla Semicirculi.

8. Deniq; cum pondus D attingit punctum F totum filum circum Trochoidis Perimetrum KCF flectatur, Radio Curvaminis CD manente nullo. Et proinde Trochois IAF ad ejus cuspidem F curvior est quàm quilibet Circulus, et cum Tangente βF producta constituit Angulum Contactus infinitè majorem quam Circulus cum rectâ potest constituere.

Sunt etiam Anguli contactûs Trochoidalibus infinitè majores Et illis deinceps alij infinitè majores, et sic in infinitum, et tamen maximi sunt infinitè minores rectilineis. Sic $xx=ay$. $x^3=by^2$. $x^4=cy^3$. $x^5=dy^4$ &c. denotant Seriem Curvarum quarum quælibet posterior cum Basi constituit Angulum contactûs infinitè majorem quàm prior cùm eadem Basi potest constituere. Estq; Angulus contactus quem prima $xx=ay$ constituit, ejusdem generis cum circularibus, et ille quem secunda $x^3=by^2$ constituit, ejusdem generis cum Trochoidalibus. Et quamvis subsequentium anguli Angulos præcedentium perpetim infinitè superant, tamen Anguli rectilinei magnitudinem nunquam possunt assequi.

Ad eundem modum $x=y$, $xx=ay$, $x^3=b^2y$. $x^4=c^3y$ &c denotant Seriem linearum quarum subsequentium Anguli advertices cum Basibus confecti sunt Angulis præcedentium perpetim infinitè minores. Quinetiam inter Angulos contactus duorum quorumlibet ex his generibus possunt alia Angulorum se infinitè superantium intercedentia genera in infinitum excogitari.

Angulorum verò contactus unum genus esse infinitè majus alio constat cum unius generis Curva utcunq; magna inter rectam tangentem et alterius generis Curvam quantumvis parvum juxta punctum contactus non potest interjacere: Sive cujus Angulus contactus necessario continet alterius Angulum contactus ut partem totius. Sic Curva $x^4=cy^3$

Angulus contactus quem cum Basi constituit necessario continet Angulum contactus Curvæ $x^3 = by^2$. Qui vero se mutuò superare possunt Anguli sunt ejusdem generis, uti de præfatis Angulis Trochoidis et hujus Curvæ $x^3 = by^2$ contigit.

Et his patet Curvas in quibusdam punctis posse infinitè rectiores esse vel infinitè Curviores qualibet Circulo et tamen formam Curvarum non ideo amittere. Sed hæc in transitu.

Exempl. 5.

Esto ED Quadratrix ad Circulum Centro A descriptum pertinens ac DB ad AE normaliter demissa dic AB $= x$, BD $= y$, & AE $= 1$. Erit $\dot{y}x - \dot{y}y^2 - \dot{y}x^2 = \dot{x}y$ ut supra. Quæ Æquatio scriptis 1, pro $\dot{x}$, & z pro $\dot{y}$ fit $zx - zy^2 - zx^2 = y$ Et inde per Prob. 1. elicitur $\dot{z}x - \dot{z}y^2 - \dot{z}x^2 + z\dot{x} - 2z\dot{x}x - 2z\dot{y}y = \dot{y}$. Factaque reductione et scriptis iterum 1 pro $\dot{x}$ & z pro $\dot{y}$, exit $\dot{z} = \frac{2z^2y + 2zx}{x - xx - yy}$. Inventis autem z & $\dot{z}$ fac $\frac{1 + zz}{\dot{z}} =$ DH. et age HC ut supra.

Si constructionem concinnare placet per brevem invenies nempe ad DT duc normalem DP occurrentem AT in P, et fac esse 2AP : AE :: PT : CH.

Scilicet est $z = \frac{y}{x - xx - yy} = \frac{BD}{-BT}$, et $zy = \frac{\overline{BD}^2}{-BT} = -BP$. et $zy + x = -AP$, et $\frac{2z}{x - xx - yy}$ in $zy + x = \frac{2BD}{AE \times \overline{BT}^2}$ in $-AP = \dot{z}$. Præterea est $1 + zz = \frac{PT}{BT}$, (utpote $= 1 + \frac{\overline{BD}^2}{\overline{BT}^2} = \frac{\overline{DT}^2}{\overline{BT}^2} = \frac{\overline{DT}^2}{\overline{BT}^2}$,) adeoque $\frac{1 + zz}{\dot{z}} = \frac{PT \times AE \times BT}{-2BD \times AP} =$ DH. Denique est BT : BD :: DH : CH $= \frac{PT \times AE}{-2AP}$. Ubi valor negativus tantum arguit CH capi eadem esse ad partes DH versus AB.

Eadem methodo Spiralium et aliarum quarumvis Curvarum curvatura; calculo brevissimo determinari potest.

Ad Curvaturam præterea cum Curvæ alijs modis ad rectas referuntur, sine prævia reductione determinandam jam potuit hæc Methodus applicari perinde ut in determinando Tangentes factum est, sed cùm omnes Geometricæ Curvæ ut et Mechanicæ (præsertim ubi definientes conditiones ad infinitas Æquationes uti post ostendam reducantur) ad rectangulas Ordinatas referri possint, videor satis præstitisse. Qui plura desiderat haud difficulter proprio Marte supplebit. Præsertim si in ejus rei illustrationem ex abundanti Methodum pro Spiralibus adjecero.

Esto

Esto BK Circulus A Centrum ejus B punctum in Circumferentia datum, ADd Spiralis, DC perpendiculum ejus, & C Centrum curvitatis ad punctum D. Ductaque ADK recta et ei parallela et æquali CG, ut et normali GF occurrente CD in F. Dic AB vel AK $= 1 =$ CG, BK $= x$, AD $= y$, & GF $= z$. Præterea concipe punctum D per infinite parvum Spatium Dd in Spirali moveri, et perinde per d agi semidiametrum AK, eique parallelam et æqualem Cg, et normalem gf occurrentem Cd in f, cui etiam GF occurrit in P; Produc GF ad φ ut sit $G\varphi = gf$, et ad AK demitte normalem $d\varepsilon$ et produc donec cum CD conveniat ad I; Et ipsarum BK, AD, ac $G\varphi$ contemporanea momenta erunt Kk, $D\varepsilon$ & $F\varphi$ quæ proinde dicentur $\dot{x}\times o$, $\dot{y}\times o$, $\dot{z}\times o$.

Jam est AK : $A\varepsilon$ (AD) :: kK : $d\varepsilon = oy$, ubi assumo $\dot{x} = 1$ ut supra. Item CG : GF :: $d\varepsilon : \varepsilon D = oyz$, adeoque $yz = \dot{y}$, Præterea CG : CF :: $d\varepsilon : dD = oy \times CF :: dD : dI = oy \times \overline{CF}^2$. Ad hæc propter $\angle PC\varphi\ (= \angle GCg) = \angle DAd$, & $\angle CP\varphi\ (= \angle CDI) = \angle \varepsilon dD + rect.) = \angle ADd$, $\Delta\ CP\varphi$ & ADd sunt similia & inde AD : Dd :: CP (CF) : $P\varphi = o \times \overline{CF}^2$ unde aufer $F\varphi$ & restabit $PF = o \times \overline{CF}^2 - o \times \dot{z}$. Denique demisso CH normali ad AD est PF : dI :: CG : εH vel $DH = \frac{y \times \overline{CF}^2}{\overline{CF}^2 - \dot{z}}$ vel substituto $1 + zz$ pro $\overline{CF}^2$ erit $DH = \frac{y + yzz}{1 + zz - \dot{z}}$.

Et nota quod in hujusmodi computationibus quantitates (ut AD & $A\varepsilon$) pro æqualibus habeo quarum ratio a ratione æqualitatis non nisi infinite parum differt.

Ex his autem prodit hujusmodi Regula: Relatione inter x & y per quamlibet Æquationem definitâ quære relationem fluxionum $\dot{x}$ & $\dot{y}$ ope Prop. 1. et substitue 1 pro $\dot{x}$ & yz pro $\dot{y}$. Deinde ex Æquatione prodeunte quære denuo per Prob. 1. relationem inter $\dot{x}$, $\dot{y}$ & $\dot{z}$ et iterum substitue 1 pro $\dot{x}$. Prior exitus per debitam reductionem dabit $\dot{y}$ & z et posterior dabit $\dot{z}$, quibus cognitis fac $\frac{y + yzz}{1 + zz - \dot{z}} = DH$, et erige normalem HC Spiralis perpendiculo DC prius ducto occurrentem in C, & erit C Centrum Curvaminis, vel quod eodem recidit cape CH : HD :: $z : 1$ et age CD.

Exempl. 1.

Si detur $ax = y$ (Æquatio ad Spiralem Archimedeam;) erit per Prob. 1. $a\dot{x} = \dot{y}$ sive (scripto 1 pro $\dot{x}$ & yz pro $\dot{y}$) $a = yz$, et hinc denuo per Prob. 1, exit $o = \dot{y}z + y\dot{z}$. Quare ex dato quolibet Spiralis puncto D, et inde Longitudine AD sive y, dabuntur $z\ (= \frac{a}{y})$ & $\dot{z}\ (= -\frac{\dot{y}z}{y}$ sive $= \frac{-az}{y}$:) Quibus cognitis fac $1 + zz - \dot{z} : 1 + zz ::$ DA (y) : DH. Et $1 : z ::$ DH : CH.

Et hinc facile deducitur hujusmodi constructio. Produc AB ad Q ut sit AB : arc BK :: arc BK : BQ, Et fac AB+AQ : AQ :: DA : DH :: a : HC.

Exemp.

Exempl. 2.

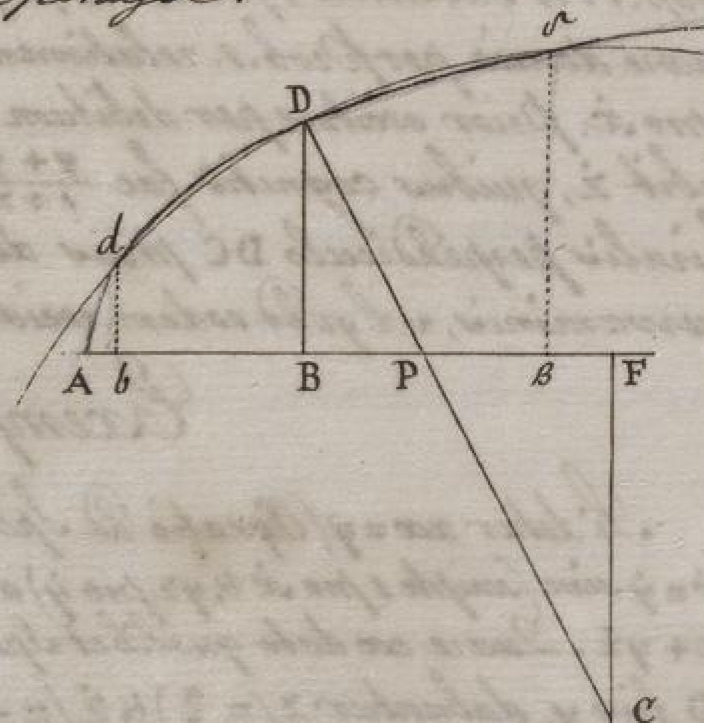
Si $ax^2 = y^3$ definit relationem inter BK & AD: obtinebis (per Prob. 1) $2a\dot{x}x = 2\dot{y}y^2$, sive $2ax = 3zy^3$, Et inde rursus $2a\dot{x} = 3\dot{z}y^3 + 9z\dot{y}y^2$. Est itaq; $z = \frac{2ax}{3y^3}$, & $\dot{z} = \frac{2a - 9zzy^3}{3y^3}$. Quibus cognitis fac $1 + zz - \dot{z} : 1 + zz :: DA : DH$, vel opere concinnato, fac $9xx + 6 : 9xx + 4 :: DA : DH$.

Exempl: 3.

Ad eundem modum si $ax^2 - bxy = y^3$ determinat relationem BK ad AD, orietur $\frac{2ax - by}{bxy + 3y^3} = z$, et $\frac{aa - 2bzy - bz^2xy - 9z^2y^3}{bxy + 3y^3} = \dot{z}$. Ex quibus DH, et inde punctum C determinatur ut ante.

Et sic aliarum quarumvis Spiralium Curvaturam nullo negotio determinabis. Imo et ad horum exemplar Regulas pro quibuslibet Curvarum generibus excogitare.

Absolvi tandem Problema sed cum Methodum adhibuerim a vulgaribus operandi modis satis diversam, et ipsum Problema non sit ex eorum numero quorum contemplatio apud Geometras increbuit: in allatæ Solutionis illustrationem et confirmationem non gravabor aliam Solutionem attingere, magis obviam et usitatis in ducendo Tangentes methodis affinem. Utpote si Centro et intervallo quovis Circulus describi concipiatur qui Curvam quamlibet in pluribus punctis secet, et Circulus ille contrahetur vel dilatetur donec duo intersectionum puncto conveniant, is Curvam ibidem tanget. Et præterea si Centrum ejus accedere vel recedere a puncto contactûs fingatur donec tertium intersectionis punctum cum prioribus in puncto contactûs conveniat, is æque curvus ac Curva in illo puncto contactus evadet. Quemadmodum in ultimo quinq; Symptomatum Centri Curvaminis supra monui, e quorum Singulis dixi Problema diversimodè confice potuisse.



Centro itaq; C et Radio CD describatur Circulus secans Curvam in punctis d, D ac δ. Et demissis db, DB, δB, & CF ad Basin AB normalibus: dic $AB = x$, $BD = y$, $AF = v$, $FC = t$, ac $DC = s$; et erit $BF = v - x$, ac $DB + FC = y + t$. Quorum Quadratorum aggregatum æquatur Quadrato DC. Hoc est $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 + 2ty + t^2 = s^2$.

Quam si placet abbreviare possis fingendo $v^2 + tt - ss =$ Symbolo cuivis q^2, et evadet $x^2 - 2vx + y^2 + 2ty + q^2 = 0$. Postquam vero t, v & q^2 inveneris si s desideres fac $= \sqrt{v^2 + t^2 - q^2}$.

Proponatur

Proponatur jam qualibet Æquatio pro Curva definienda cujus Flexuræ quantitatem invenire oportet et ejus ope alterutrum quantitatem x vel y extermina et emerget Æquatio cujus radices (db, DB, δB &c. si extermines x, vel Ab, AB, Aβ &c. si extermines y) sunt ad intersectionum puncta (d, D, δ, &c) Et proinde cùm ex istis tres evadent æquales, Circulus et Curvam contingit et erit ejusdem Curvitatis ac Curva in puncto contactus æquales autem evadent conferendo Æquationem cum alia totidem dimensionum Æquatione fictitia cujus tres sunt Æquales Radices ut docuit Cartesius; vel expeditius multiplicando terminos ejus bis per Arithmeticam Progressionem.

Exempl.

Sit $ax = yy$ (Æquatio ad Parabolam) et exterminato x (substituendo nempe in Æquatione superiori valorem ejus $\frac{yy}{a}$) prodibit .... $\frac{y^4}{aa} \begin{array}{l} -\frac{2v}{a}y^2 \\ +y^2 \end{array} + 2ty + q^2 = 0$

Cujus e radicibus y tres deferent fieri equales.

Et in hunc finem terminos per Arithmeticam progressionem bis multiplico ut hic videre est

4 . 2 . 1 . 0 .
3 . 1 . 0 . −1 .

et exit .... $\frac{12y^4}{aa} - \frac{4v}{a}y^2 + 2y^2 = 0$,

sive $v = \frac{3y^2}{a} + \frac{1}{2}a$. Unde facilè colligitur esse BF $= 2x + \frac{1}{2}a$, ut supra.

Quamobrem dato quovis Parabolæ puncto D, duc perpendiculum DP et in axe cape PF $= 2$AB, et erige normalem FC occurrentem DP in C, et erit C desideratum Centrum curvitatis.

Idem in Ellipsi et Hyperbola præstare possis sed calculo satis molesto, et in alijs Curvis ut plurimum fastidiosissimo.

De Quaestionibus quibusdam cognatis.

Ex hujus Problematis resolutione consectantur aliorum nonnullorum confectiones. Cujusmodi sunt,

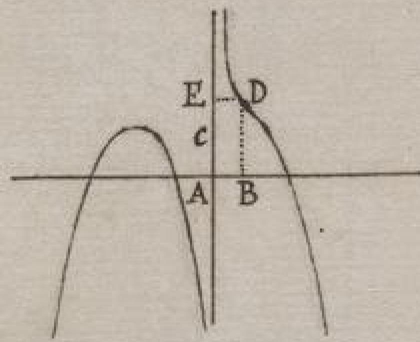
1. Invenire punctum ubi Linea datam habet Curvaturam.

Sic in Parabola $ax = yy$, si Punctum quaeratur ad quod radius Curvaturae sit datae Longitudinis f; e Centro Curvaturae ut prius invento radium determinabis esse $\frac{\dot{x} + 4x}{2\dot{z}} \sqrt{\dot{z}\dot{z} + 4\dot{z}x}$, quem pone aequalem f. Et factâ reductione emerget $x = -\frac{1}{4}a + \sqrt[3]{\frac{1}{16}a^2 f}$.

2. Invenire Punctum Rectitudinis.

Punctum Rectitudinis voco ad quod Radius flexionis infinitus evadit, sive Centrum infinitè distans; quale est ad verticem Parabolae $ax^3 = y^4$. Et hoc idem plerumq limes est flexionis contrariae cujus determinationem supra posui. Sed et alia haud inelegans ex hoc Problemate scaturit. Nempe quo longior est Radius flexionis eo minor evadit Angulus DCd (fig. p.) et pariter Momentum δf adeoq fluxio quantitatis z una diminuatur, ita ut per ejus radij infinitatem prorsus evanescant. Quaere ergo fluxionem $\dot{z}$ et suppone nullam esse.

Quemadmodum si limitem flexus contrarij in Parabola secundi generis cujus ope Cartesius construxit Aequationes sex dimensionum determinare oportet. Ad illam Curvam Aequatio est $x^3 - bx^2 - cdx + bcd + dxy = 0$. Et hinc per Prob. 1. exit $3\dot{x}x^2 - 2b\dot{x}x - cd\dot{x} + d\dot{x}y + dx\dot{y} = 0$; Quae, scripto 1 pro $\dot{x}$ & z pro $\dot{y}$, fit $3x^2 - 2bx - cd + dy + dxz = 0$, unde rursus per Prob. 1, exit $6\dot{x}x - 2b\dot{x} + dy + d\dot{x}z + dx\dot{z} = 0$; Et hac scripta iterum 1 pro $\dot{x}$, z pro $\dot{y}$, et 0 pro $\dot{z}$, fit $6x - 2b + 2dz = 0$. Jam extermina z scribendo pro dz valorem $2b - 3x$, in Aequatione $3x^2 - 2bx - cd + dy + dxz = 0$ et proveniet $-cd + dy = 0$, sive $y = c$.



Quamobrem ad punctum A erige perpendiculum AE = c. Et per E duc ED parallelam AB, Et punctum D ubi Parabola partem convexo-concavam secuerit erit in confinio Flexionis contrariae.

Similiq Methodo alia Rectitudinis puncta quae non interjacent partibus contrariae flexis determinari possint. Veluti si $x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - b^3y = 0$ Curvam definiat, exinde per Prob. 1. imprimis producetur $4x^3 - 12ax^2 + 12a^2x - b^3z = 0$. Et hinc denuò $12x^2 - 24ax + 12a^2 - b^3\dot{z} = 0$, ubi suppone $\dot{z} = 0$, et facta reductione prodibit $x = a$. Quamobrem sume AB = a et BD normaliter erecta Curvae in desiderato Rectitudinis puncto D occurret.

3. Invenire

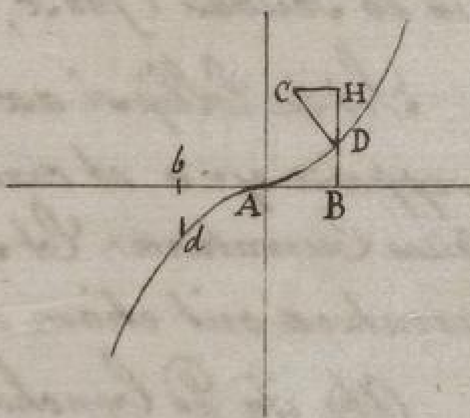
3. Invenire punctum Flexûs infiniti

Quære Radium Curvaminis et suppone nullum esse. Sic ad Parabolam secundi generis Æquatione $x^3 = ay^2$ definitam, erit Radius ille $CD = \frac{4a+9x}{6a}\sqrt{4ax+9xx}$; qui nullus evadit cum sit $x=0$.

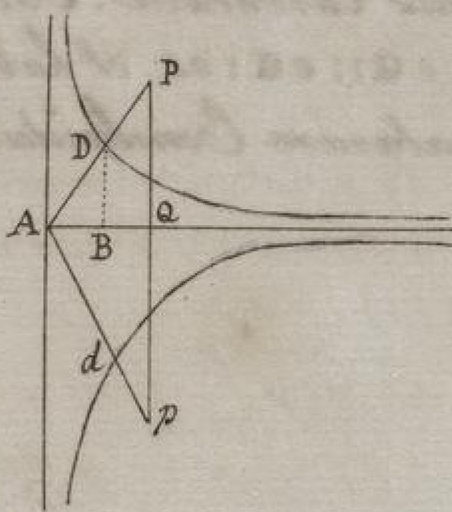
4. Flexus Maximi Minimive punctum determinare.

Ad hujusmodi puncta Radius Curvaturæ aut Maximus aut Minimus evadit. Quare Centrum Curvaturæ ad id temporis momentum nec versus punctum contactus neq; ad contrarias partes movetur sed penitus quiescit. Quæratur itaq; Fluxio Radij CD; vel expeditius, quæratur Fluxio alterutrius rectæ BH vel AK et supponatur nulla.

Quemadmodum si de Parabola secundi generis $x^3 = a^2y$ quæstio proponatur: imprimis ad Curvaturæ Centrum determinandum invenies $DH = \frac{aa+9xy}{6x}$ adeoq; est $BH = \frac{aa+15xy}{6x}$, dic autem $BH = v$, et erit $\frac{aa}{6x} + \frac{5}{2}y = v$ unde juxta Prob: 1. educitur $-\frac{a^2\dot{x}}{6xx} + \frac{5}{2}\dot{y} = \dot{v}$, Jam vero $\dot{v}$ ipsius BH fluxionem suppone nullam esse, et insuper cùm ex Hypothesi sit $x^3 = a^2y$ et inde per Prob: 1. $3\dot{x}x^2 = a^2\dot{y}$, posito $\dot{x}=1$, substitue $\frac{3xx}{aa}$ pro $\dot{y}$ et emerget $45x^4 = a^4$. Cape ergo $AB = \sqrt[4]{\frac{a^4}{45}}$. Et BD normaliter erecta occurret Curvæ in puncto Maximæ Curvaturæ. vel quod perinde est fac $AB:BD::3\sqrt{5}:1$



Ad eundem modum Hyperbola secundi generis per Æquationem $xy^2 = a^3$ designata Maximè flectitur in punctis D, d, quæ determinabis sumendo $AQ = 1$, in Basi, et erigendo $QP = \sqrt{5}$, eiq; æqualem Q ex altera parte, et agendo AP et Ap, quæ Curvæ occurrent in desideratis punctis D ac d.



5. Locum Centri Curvaminis determinare, sive Curvam describere in quâ Centrum istud perpetuo versatur.

Trochoidis Centrum Curvaminis in alia Trochoide versari ostensum est. Et sic Parabolæ Centrum istud in alia secundi generis (quam Æquatio $axx = y^3$ definit) Parabola versatur, ut inito Calculo facilè constabit.

6. Luce

6. Luce in quamlibet Curvam incidente, invenire Focum sive concursum Radiorum circa quodpiam ejus punctum Refractorum.

Curvaturam ad istud Curvæ punctum quære, et Centro Radioq; curvaturæ Circulum describe; Dein quære concursum Radiorum a Circulo circa istud punctum refractorum. Nam idem erit concursus refractorum a propositâ Curvâ.

7. His addi potest particularis inventio Curvaturæ ad Vertices Curvarum ubi normaliter secant Bases. Nempe punctum in quo curvæ perpendiculum cum Basi conveniens ipsam ultimò secuerit, est Centrum Curvaturæ ejus.

Quamobrem habitâ relatione inter Basin x & rectangulum applicatam y, et inde (per Prob: 1.) relationem inter fluxiones $\dot{x}$ & $\dot{y}$; valor $\dot{y}y$, si in eo scribas 1 pro $\dot{x}$, & fingas $y=0$ erit Radius Curvaturæ.

Sic in Ellipsi $ax-\frac{a}{b}xx=yy$, est $\frac{a\dot{x}}{2}-\frac{a\dot{x}x}{b}=\dot{y}y$, qui valor $\dot{y}y$ si suppona $y=0$ et consequenter $x=0$, et scribas 1 pro $\dot{x}$, evadet $\frac{1}{2}a$ radius Curvaturæ. Et sic ad vertices Hyperbolæ & Parabolæ radius Curvaturæ erit etiam dimidium Lateris rectum.

Atq ita ad Conchoidem Æquatione $\frac{b^2c^2}{xx}+\frac{2bcc}{x}\pm\frac{cc}{bb}-2bx-xx=yy$ definitam valor $\dot{y}y$ ope Prob: 1. invenietur $-\frac{b^2c^2}{x^3}-\frac{bc^2}{x^2}-b-x$. Qui supponendo $y=0$, & inde $x=c$ vel $-c$, evadet $-\frac{bb}{c}-2b-c$, vel $\frac{bb}{c}-2b+c$ radius Curvaturæ. Fac ergo AE : EG :: EG : EC (vide Fig: prob. 4) Et Ae : eG :: eG : ec, et habes Curvaturæ centra C & c ad Vertices conjugatarum Conchoidum E & e.

Probl: 6.

Curvaturæ ad datum Curvæ alicujus Punctum Qualitatem determinare.

Per Qualitatem Curvaturæ intelligo formam ejus quatenus est plus vel minus inæquabilis, sive quatenus plus vel minus variatur in processu per diversas partes Curvæ. Sic interroganti qualis sit Circuli Curvatura, responderi potest quod sit uniformis sive invariata: Et interroganti qualis sit Curvatura Spiralis quæ describitur per motum puncti D (fig.) cum accelerata celeritate AD in recta AK uniformiter circa Centrum A gyrante progredientis ab A adeo ut recta AD ad Arcum BK dato puncto K descriptum rationem habeat numeri ad Logarithmum ejus, responderi potest quod sit uniformiter variata sive quod sit æquabiliter inæquabilis. Et sic aliæ Curvæ in singulis earum punctis aliquales pro Curvaturæ variatione denominari possunt.

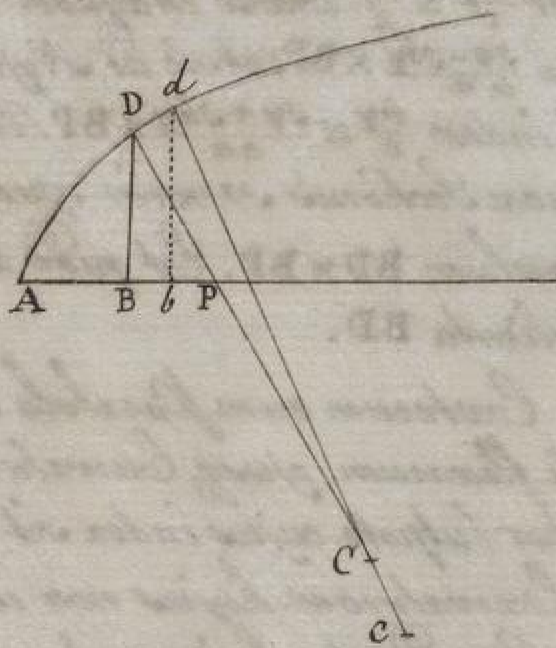
Quæritur itaque Curvaturæ circa aliquod Curvæ punctum inæquabilitas sive variatio. Qua de causa animadvertendum est.

1. Quod ad puncta in similibus Curvis similiter posita similis est inæquabilitas sive variatio Curvaturæ.

2. Et quod momenta radiorum Curvaturæ ad illa puncta sunt proportionalia contemporaneis momentis Curvarum, et fluxionis fluxionibus.

3. Atque adeò quod ubi fluxiones illæ non sunt proportionales dissimiles erit inæquabilitas Curvaturæ. Utpote major erit inæquabilitas ubi major est ratio fluxionis radij Curvaturæ ad fluxionem Curvæ; Adeòque fluxionum ratio illa non immeritò dici potest index inæquabilitatis sive variationis Curvaturæ.

Ad Curvæ alicujus AD puncta D ac d, infinitè parùm distantia sunto radij Curvaturæ DC ac dc; Et existente Dd momento Curvæ erit Cc contemporaneum momentum radij Curvaturæ, et $\frac{Cc}{Dd}$ index inæquabilitatis Curvaturæ. Nempe tanta dicetur inæquabilitas illa, quantam esse indicat rationis illius $\frac{Cc}{Dd}$ quantitas sive Curvatura dicetur tanto dissimilior Curvaturæ Circuli.



Demissis jam ad quamlibet AB occurrentem DC in P rectangulis applicatis DB ac db, dic $AB = x$, $BD = y$, $DP = t$, $DC = v$, & inde $Bb = \dot{x}o$, eritque $Cc = \dot{v}o$; et $BD : DP :: Bb : Dd = \frac{\dot{x}ot}{y}$, ac $\frac{Cc}{Dd} = \frac{\dot{v}y}{\dot{x}t}$ sive $\frac{\dot{v}y}{t}$, supposito $\dot{x} = 1$. Quamobrem relatione inter x & y per quamlibet Æquationem definitâ, et inde juxta Prob: 4 & 5. invento Perpendiculo DP sive t, et radio Curvaturæ v, ejusque radij fluxione $\dot{v}$ per Prob: 1; dabitur index inæquabilitatis Curvaturæ $\frac{\dot{v}y}{t}$.

Exemp. 1.

Exempl: 1.

Sit $2ax=yy$ (Æquatio ad Parabolam) et (per Prob: 4) erit BP $=a$ adeoq; DP $=\sqrt{aa+yy}=t$. Item (per Prob: 5) BF $=a+2x$, Et BP : DP :: BF : DC $=\frac{at+3tx}{a}=v$. Jam Æquationes $2ax=yy$, & $aa+yy=tt$, & $\frac{at+2tx}{a}=v$, per Prob: 1. dant $2a\dot{x}=2\dot{y}y$, & $2\dot{y}y=2\dot{t}t$, & $\frac{a\dot{t}+2\dot{t}x+2t\dot{x}}{a}=\dot{v}$. Quibus ordinatis, et posito $\dot{x}=1$, orientur $\dot{y}=\frac{a}{y}$, $\dot{t}=\frac{\dot{y}y}{t}$ vel $=\frac{a}{t}$, & $\dot{v}=\frac{a\dot{t}+2\dot{t}x+xt}{a}$ et sic inventis $\dot{y}$, $\dot{t}$ & $\dot{v}$ habebitur $\frac{\dot{v}y}{t}$ index inæquabilitatis Curvaturæ.

Quemadmodum si in numeris definiatur $a=1$, sive $2x=yy$ & $x=\frac{1}{2}$, erit y $(=\sqrt{2x})=1$, $\dot{y}\left(=\frac{a}{y}\right)=1$, $t\left(=\sqrt{aa+yy}\right)=\sqrt{2}$, $\dot{t}\left(\frac{a}{t}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}}$, & $\dot{v}\left(\frac{a\dot{t}+2\dot{t}x+2t}{a}\right)=3\sqrt{2}$ Adeoq; $\frac{\dot{v}y}{t}=3$ indici inæquabilitatis.

Sin autem definiatur $x=2$, erit $y=2$, $\dot{y}=\frac{1}{2}$, $t=\sqrt{5}$, $\dot{t}=\sqrt{\frac{1}{5}}$, & $\dot{v}=3\sqrt{5}$; Adeoq; $\frac{\dot{v}y}{t}=6$ index inæquabilitatis.

Quamobrem inæquabilitas Curvaturæ ad punctum a quo ad Axin demissa Ordinatim applicata æquatur Lateri recto Parabolæ dupla est ejus ad punctum a quo demissa Ordinatim applicata æquatur dimidio ejusdem Lateris recti: Hoc est Curvatura in priori casu duplo dissimilior est Curvaturæ Circuli, quam in posteriori.

Exempl: 2.

Sit $2ax-bxx=yy$, et per Prob. 4 erit $a-bx=$ BP, et inde $aa-2abx+b^2x^2+y^2=t^2$, sive $aa-byy+yy=tt$. Item per Prob: 5 erit DH $=y+\frac{y^3-by^3}{aa}$, ubi si $yy-byy$ substituas $tt=aa$ evadet DH $=\frac{tty}{aa}$. Et est BD : DP :: DH : DC $=\frac{t^3}{aa}=v$. Jam (per Prob. 1.) Æquationes $2ax-bxx=yy$, Et $aa-by^2+yy=tt$, et $\frac{t^3}{aa}=v$, dant $a-bx=\dot{y}y$ et $\dot{y}y-b\dot{y}y=\dot{t}t$ & $\frac{3\dot{t}t^3}{aa}=\dot{v}$. Et sic invento $\dot{v}$ dabitur $\frac{\dot{v}y}{t}$ index inæquabilitatis Curvaturæ.

Sic ad Ellipsin $2x-3xx=yy$, ubi est $a=1$ & $b=3$, si supponatur $x=\frac{1}{2}$ erit $y=\frac{1}{2}$, $\dot{y}=-1$, $t=\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\dot{t}=\sqrt{2}$, $\dot{v}=3\sqrt{\frac{1}{2}}$: Et $\frac{\dot{v}y}{t}=\frac{3}{2}$ indici inæquabilitatis Curvaturæ. Unde patet Curvaturam hujus Ellipsis ad hic definitum punctum D esse duplo minus inæquabilem (sive duplo similiorem Curvaturæ Circuli) quàm Curvatura Parabolæ ad illud ejus punctum a quo ad Axin demissa Ordinatim applicata æquatur dimidio ejus Lateris recti.

Si conclusiones in his Exemplis concinnare placet ad Parabolam $2ax=yy$ exibit $\frac{\dot{v}y}{t}=\frac{3y}{a}$ index inæquabilitatis, et ad Ellipsin $2ax-bxx=yy$ exibit index $\frac{\dot{v}y}{t}=\frac{3y-3by}{aa}\times$ BP; et sic ad Hyperbolam $2ax+bxx=yy$, observata analogia erit index $\frac{\dot{v}y}{t}=\frac{3y+3by}{aa}\times$ BP. Unde patet quod ad diversa puncta cujusvis Conicæ Sectionis seorsim spectatæ Curvaminis inæquabilitas est ut rectangulum BD × BP. Et quod ad diversa puncta Parabolæ est ut Ordinatim applicata BD.

Cæterum cum Parabola sit simplicissima Linearum inæquabili Curvaturâ flexarum, ejusq; Curvaturæ inæquabilitas tam levi negotio determinatur (utpote cujus index sit $\frac{6\times \text{Ordin: applic.}}{\text{Lat: rect:}}$;) aliarum Curvarum Curvatura ad Curvaturam hujus non incommodè referri possunt.

Quemadmodum si quæratur qualis sit Ellipseos $2x-3xx=yy$ curvatura ad illud ejus punctum quod definitur assumendo $x=\frac{1}{2}$: Quoniam index ejus (ut supra) sit $\frac{3}{2}$, responderi potest esse similem Curvaturæ Parabolæ $6x=yy$ ad illud ejus punctum inter quod et Axin recta $=\frac{3}{2}$ Ordinatim applicatur.

Sic

Sic cùm Lineæ Spiralis ADE (fig. p.) jam ante descriptæ fluxio sit ad fluxionem subtensæ AD in data quadam ratione puta d ad e: versus partes concavas ejus erige ad AD normalem $AP = \frac{e}{\sqrt{dd-ee}} \times AD$, et erit P Centrum Curvaturæ, et $\frac{AP}{AD}$ sive $\sqrt{\frac{dd-ee}{e}}$ index in æqualitatis ejus. Quare Spiralis hæcce Curvaturam habet ubiq; similiter inæquabilem ac Parabola $6x = yy$ habet in illo ejus puncto a quo demittitur ad Axin Ordinatim applicata $= \sqrt{\frac{dd-ee}{e}}$.

Et sic index inæquabilitatis ad quodvis Trochoidis punctum D (fig.) invenietur esse $\frac{AB}{BL}$. Quare Curvatura ejus ad idem D tam inæquabilis est sive tam dissimilis Curvaturæ Circuli, quàm Curvatura Parabolæ cujusvis $ax = yy$ ad illud ejus punctum ubi Ordinatim applicata æquatur $\frac{1}{6} a \times \frac{AB}{BL}$.

Ex his credo Sensus Problematis satis elucescet, quo benè perspecto non difficile erit animadvertenti Seriem rerum supra traditarum plura exempla de proprio suppeditare et hujusmodi complures alias operandi methodos, prout res exiget, concinnare. Quinetiàm cognata Problemata (ubi perplexa computatione non conteritur & fatigatur,) haud majori difficultate transiget. Cujusmodi sunt

1. Invenire Punctum Curvæ alicujus ubi vel nullam, vel infinitam, vel Maximam aut Minimam, vel datam quamvis habeat inæquabilitatem Curvaturæ. Sic ad vertices Conicarum Sectionum nulla est inæquabilitas Curvaturæ; ad cuspidem Trochoidis infinita est; et ad puncta Ellipseos maxima est ubi rectangulum $BD \times BP$ fit maximum, hoc est, ubi lineæ Diagonales rectanguli Parallelogrammi circumscripti Ellipsin secant cujus latera tangunt illam in principalibus verticibus.

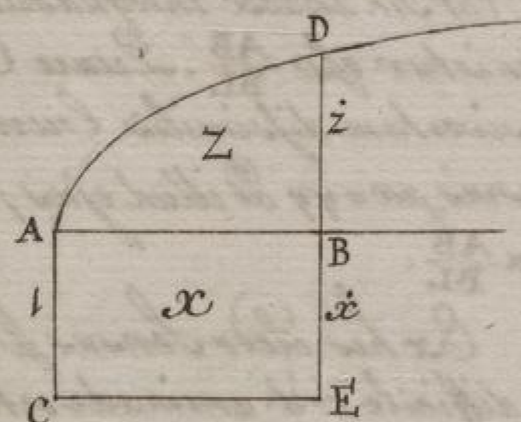
2. Curvam alicujus definitæ Speciei, puta Conicam Sectionem determinare, cujus Curvaturæ ad aliquod punctum & æqualis sit et similis Curvaturæ alterius alicujus Curvæ ad datum punctum ejus.

3. Conicam Sectionem determinare ad cujus Punctum aliquod Curvaturæ & lineæ tangentis (respectu Axis) positio sit similis Curvaturæ ac tangentis positione alterius alicujus Curvæ ad assignatum punctum ejus. Et hujus Problematis usus est ut vice Ellipsium secundi generis quarum refringendi proprietates Cartesius in Geometria demonstravit, Conicæ Sectiones idem in Refractionibus quàm proximè præstantes subrogari possint. Atq; idem de alijs Curvis intellige.

Probl: 7.

Curvas pro arbitrio multas invenire quarum Areæ per finitas Æquationes designari possunt.

Sit AB Basis Curvæ, ad cujus initium A erigatur normalis $AC = 1$ et agatur CE parallela AB, sit etiam DB rectangula applicata occurrens rectæ CE in E, & Curvæ AD in D. Et concipe has Areas ACEB & ADB a rectis BE & BD per AB delatis generari. Et earum incrementa sive fluxiones perpetim erunt ut lineæ describentes BE & BD. Quare parallelogrammum ACEB sive $AB \times 1$, dic x, & Curvæ Aream ABD dic z: et fluxiones $\dot{x}$ & $\dot{z}$ erunt ut BE & BD adeoque posito $\dot{x} = 1 = BE$, erit $\dot{z} = BD$.



Si jam ad arbitrium assumatur Æquatio quævis pro definienda relatione z ad x, exinde per Prob: 1. elicietur $\dot{z}$. Atque ita duæ habebuntur Æquationes quarum posterior Curvam definiet, et prior Aream ejus.

Exempla.

Assumatur $xx = z$, & inde per Prob: 1. elicietur $2\dot{x}x = \dot{z}$, sive $2x = \dot{z}$ siquidem est $\dot{x} = 1$.

Assumatur $\frac{xxx}{a} = z$ et inde prodibit $\frac{3xx}{a} = \dot{z}$ Æquatio ad Parabolam.

Assumatur $ax^3 = zz$, sive $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = z$, et emerget $\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = \dot{z}$, sive $\frac{3}{4}ax = \dot{z}\dot{z}$ Æquatio iterum ad Parabolam.

Assumatur præterea $a^3x = zz$, sive $a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} = z$, et elicietur $-a^3x^{-2} = \dot{z}$ sive $a^3 + \dot{z}xx = 0$; ubi negativus valor ipsius $\dot{z}$ tantum denotat BC capiendam esse ad partes contra BE.

Adhæc si assumas $c^2a^2 + c^2x^2 = z^2$, elicies $2c^2x = 2z\dot{z}$, et exterminato z proveniet $\frac{cx}{\sqrt{aa + xx}} = \dot{z}$.

Vel si assumas $\frac{aa + xx}{6}\sqrt{aa + xx} = z$, dic $\sqrt{aa + xx} = v$, et erit $\frac{v^3}{6} = z$, et inde (per Prob: 1,) $\frac{3\dot{v}vv}{6} = \dot{z}$. Item Æquatio $aa + xx = vv$, per Prob. 1, dat $2x = 2v\dot{v}$, cujus ope si extermines $\dot{v}$, fiet $\frac{3vx}{6} = \dot{z} = \frac{2x}{6}\sqrt{aa + xx}$.

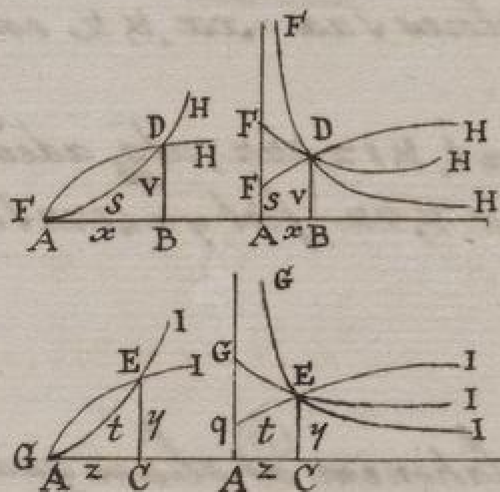
Si denique assumas $8 - 3xz + \frac{2}{5}z = zz$, elicies $-3z - 3x\dot{z} + \frac{2}{5}\dot{z} = 2\dot{z}z$. Quare per assumptam Æquationem imprimis quære Aream z, ac deinde Applicatam $\dot{z}$ per elicitam.

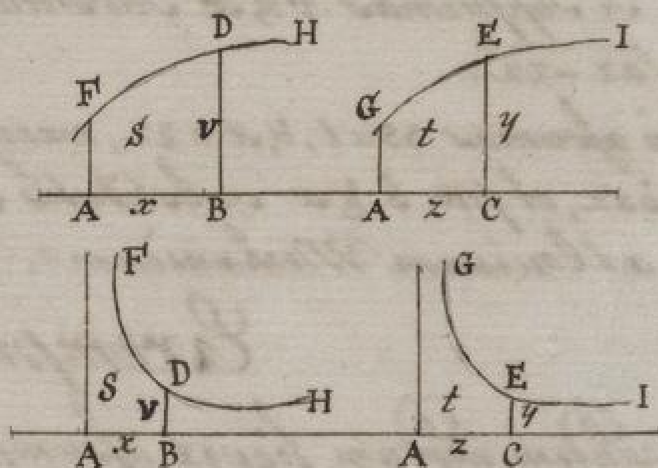
Atque ita ex Areis qualescunque attingas semper possis Applicatas determinare.

Probl: 8.

Curvas pro arbitrio multas invenire quarum Areæ ad Aream datæ alicujus Curvæ relationem habent per finitas Æquationes designabilem.

Sit FDH data Curva, ac GEI quæsita, et earum Applicatas DB & EC concipe super Basibus AB et AC erectas incedere.





Et Arearum quas ita transigunt incrementa sive Fluxiones erunt ut Applicatæ illæ ductæ in earum velocitates incedendi hoc est in Fluxiones Basium. Sit ergo AB $= x$, BD $= v$, AC $= z$, ac CE $= y$, Area AFDB $= s$, & Area AGEC $= t$, ac Arearum fluxiones sint $\dot{s}$ et $\dot{t}$; Eritq $\dot{x}v : \dot{z}y :: \dot{s} : \dot{t}$. Quare si supponatur $\dot{x} = 1$, & $v = \dot{s}$, ut supra; erit $\dot{z}y = \dot{t}$ et inde $\frac{\dot{t}}{\dot{z}} = y$.

Assumantur itaq duæ quævis Æquationes quarum una definiat relationem Arearum s ac t, & altera relationem Basium x & z, et inde (per Prob. 1.) quærantur fluxiones $\dot{t}$ & $\dot{z}$, & statuatur $\frac{\dot{t}}{\dot{z}} = y$.

Exempl. 1.

Data Curva AFD sit Circulus Æquatione $ax - xx = vv$ designatus et quærantur aliæ Curvæ quarum Areæ adæquant Aream ejus. Ex Hypothesi ergo est $s = t$, et inde $\dot{s} = \dot{t} = v$. Et $y = (\frac{\dot{t}}{\dot{z}} =) \frac{v}{\dot{z}}$. Superest ut $\dot{z}$ determinetur assumendo relationem aliquam inter Bases x & z.

Veluti si fingas $ax = zz$, erit per Prob: 1, $a = 2\dot{z}z$: Quare substitue $\frac{a}{2z}$ pro $\dot{z}$, et fiet $y = (\frac{v}{\dot{z}} =) \frac{2vz}{a}$. Est autem $v = (\sqrt{ax - xx} =) \frac{z}{a}\sqrt{aa - zz}$, adeoq $\frac{2zz}{aa}\sqrt{aa - zz} = y$, Æquatio ad Curvam cujus Area æquatur Areæ Circuli.

Ad eundem modum si fingas $xx = z$, proveniet $2x = \dot{z}$, & inde $y = (\frac{v}{\dot{z}} =) \frac{v}{2x}$ et exterminato v et x, fiet $y = \frac{\sqrt{az^{\frac{1}{2}} - z}}{2z^{\frac{1}{2}}}$.

Vel si fingas $cc = xz$, proveniet $o = z + x\dot{z}$, et inde $\frac{-vx}{z} = y = \frac{-c^3}{z^3}\sqrt{az - a}$.

Atq ita si fingas $ax + \frac{s}{1} = z$, ope Prob: 1. obtinebitur $a + \dot{s} = \dot{z}$, et inde $\frac{v}{a + \dot{s}} = y = \frac{v}{a + v}$ quæ Curvam Mechanicam designat.

Exemp. 2

Exemp: 2.

Detur iterum Circulus $ax-xx=vv$, & quærantur Curvæ quarum Areæ ad Aream ejus habeant aliam quamlibet assumptam relationem. Veluti si assumas $cx+s=t$, et præterea fingas $ax=zz$ mediante Prob: 1. elicias $c+\dot{s}=\dot{t}$ & $a=2\dot{z}z$. Quare est $y\left(=\frac{\dot{t}}{\dot{z}}=\right)\frac{2cz+2\dot{s}z}{a}$, et substituto $\sqrt{ax-xx}$ pro $\dot{s}$, & $\frac{zz}{a}$ pro x, fit $y=\frac{2cz}{a}+\frac{2zz}{aa}\sqrt{aa-zz}$.

Quod si assumas $s-\frac{2v^3}{3a}=t$, & $x=z$, invenies ope Prob: 1. $\dot{s}-\frac{2\dot{v}v^2}{a}=\dot{t}$, & $1=\dot{z}$. Adeoq; $y=\left(\frac{\dot{t}}{\dot{z}}=\right)\dot{s}=\frac{2\dot{v}vv}{a}$, sive $=v-\frac{2\dot{v}v^2}{a}$. Jam vero pro exterminando $\dot{v}$, Æquatio $ax-xx=vv$, per Prob: 1. dat $a-2x=2\dot{v}v$, & proinde est $y=\frac{2vx}{a}$, ubi si supprimas v & x substituendo valores $\sqrt{ax-xx}$, & z emerget $y=\frac{2z}{a}\sqrt{az-zz}$.

Sin assumas $ss=t$, & $x=zz$, emerget $2\dot{s}s=\dot{t}$, & $1=2\dot{z}z$, atq; adeò $y=\left(\frac{\dot{t}}{\dot{z}}=\right)4\dot{s}sz$, et pro $\dot{s}$ & x substitutis $\sqrt{ax-xx}$ & zz, fiet $y=4szz\sqrt{a-zz}$ Æquatio ad Curvam Mechanicam.

Exempl: 3.

Ad eundem modum figuræ assumptam relationem ad aliam quamvis datam figuram habentes inveniuntur. Sic data Hyperbola $cc+xx=vv$, si assumas $s=t$, et $xx=cz$, elicies, per Prob: 1. $\dot{s}=\dot{t}$, & $2x=c\dot{z}$, et inde $y=\left(\frac{\dot{t}}{\dot{z}}=\right)\frac{c\dot{s}}{2x}$, & substitutis $\sqrt{cc+xx}$ pro $\dot{s}$, & $c^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}$ pro x, proveniet $y=\frac{c}{z}\sqrt{cz+zz}$.

Atq; ita si assumas $xv-s=t$, & $xx=cz$, elicies $v+\dot{v}x-\dot{s}=\dot{t}$, et $2x=c\dot{z}$. Est autem $v=\dot{s}$, & inde $\dot{v}x=\dot{t}$. Quare $y=\left(\frac{\dot{t}}{\dot{z}}=\right)\frac{c\dot{v}}{2}$. Jam vero $cc+xx=vv$, ope Prob: 1. dat $x=\dot{v}v$. Adeoq; est $y=\frac{cx}{2v}$, et substitutis $\sqrt{cc+xx}$ pro v, & $c^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}$ pro x, fit $y=\frac{cz}{2\sqrt{cz+zz}}$.

Exempl: 4.

Adhæc si detur Cissoides $\frac{xx}{\sqrt{ax-xx}}=v$, ad quam relatæ aliæ figuræ sunt inveniendæ, et ea de causa assumatur $\frac{x}{3}\sqrt{ax-xx}+\frac{2}{3}s=t$, finge $\frac{x}{3}\sqrt{ax-xx}=h$, ejusq; fluxionem $\dot{h}$ et erit $h+\frac{2}{3}s=t$, et inde per Prob. 1. $\dot{h}+\frac{2}{3}\dot{s}=\dot{t}$. Æquatio autem $\frac{ax^3-x^4}{9}=hh$, per Prob. 1. dat $\frac{3ax^2-4x^3}{9}=2\dot{h}h$, ubi si extermines h, fiet $\dot{h}=\frac{3ax-4xx}{6\sqrt{ax-xx}}$. Quare cum præterea sit $\frac{2}{3}\dot{s}=\left(\frac{2}{3}v=\right)\frac{4xx}{6\sqrt{ax-xx}}$, erit $\frac{ax}{2\sqrt{ax-xx}}=\dot{t}$. Porro ad determinandum z & $\dot{z}$, assumatur $\sqrt{aa-ax}=z$, et ope Prob: 1. emerget $-a=2\dot{z}z$ sive $\dot{z}=\frac{-a}{2z}$. Quare est $y\left(=\frac{\dot{t}}{\dot{z}}=\frac{-zx}{\sqrt{ax-xx}}=\sqrt{\frac{zzx}{a-x}}=\sqrt{ax}\right)=\sqrt{aa-zz}$. Quæ Æquatio cum sit ad Circulum, habebitur relatio Arearum Circuli et Cissoidis.

Atq; ita si assumpsisses $\frac{2x}{3}\sqrt{ax-xx}+\frac{1}{3}s=t$, & $x=z$, prodiisset $y=\sqrt{az-zz}$ Æquatio denuò ad Circulum.

Haud secus si detur Curva aliqua Mechanica possunt aliæ ad eam relatæ Curvæ Mechanicæ inveniri, sed ad eliciendum Geometricas convenit ut e rectis ab invicem Geometricè dependentibus aliqua pro Basi adhibeatur, et ut Area ad Parallelogrammum complementalis quæratur supponendo fluxionem ejus valore Basin ductam in fluxionem Ordinatim Applicatæ.

Exemp.

Exempl: 5.

Sic Trochoide ADF propositâ refero ad Basin AB, et completo Parallelogrammo ABDG quaero complementalem superficiem ADG (fig. P. 48.) concipiendo descriptam esse per motum rectae GD, et proinde fluxionem ejus valore illam GD in celeritatem progrediendi ductam, hoc est $x \times \dot{v}$. Jam cùm AL sit parallela Tangenti DT, erit AB ad BL ut fluxio ejusdem AB ad fluxionem applicatae BD, hoc est ut 1 ad $\dot{v}$. Quare est $v = \frac{BL}{AB}$, adeoque $x\dot{v} = BL$; Et proinde Area ADG describitur fluxione BL: Atque adeo cum Area circularis ALB eadem fluxione describatur aequales erunt.

Pari ratione si concipias ADF esse Figuram Arcuum (fig. p. 48.) sive Sinuum versorum, hoc est cujus Applicata BD aequatur Arcui AL: cùm fluxio Arcus AL sit ad fluxionem Basis AB, ut PL ad BL, hoc est $\dot{v} : 1 :: \frac{1}{2}a : \sqrt{ax - xx}$, erit $\dot{v} = \frac{a}{2\sqrt{ax - xx}}$. Adeoque $\dot{v}x$ fluxio Areae ADG erit $\frac{ax}{\sqrt{ax - xx}}$. Quare si ad ipsius AB punctum B recta aequales $\frac{ax}{2\sqrt{ax - xx}}$ in Angulo recto applicari concipiatur, illa ad Curvam quandam Geometricam terminabitur cujus Area Basi AB adjacens aequatur Areae ADG.

Et sic alijs figuris ss Arcuum Circuli Hyperbolae vel cujus vis Curvae ad Arcuum istorum Sinus rectos vel versos, aut alias quasvis Geometricè determinabiles rectas lineas in datis Angulis applicationem constitutis, aequales Geometricae figurae inveniri possunt.

Circa Spiralium Areas levissimum est negotium. Utpote Centro Convolutionis A radio quovis AG (fig. p. __) descripto Arcu DG occurrente AF in G et Spirali in D; cùm Arcus ille ad instar lineae super Basi AG incedentis describit Spiralis Aream AHDG ita ut ejus Areae fluxio sit ad fluxionem rectanguli $1 \times AG$ ut Arc GD ad 1; Si rectam GL Arcui ipsi aequalem erigas illa similiter incedendo super eadem AG describet Aream ALG aequalem Areae Spiralis AHDG; Curvâ EIL existente Geometricâ. Et praeterea si subtensa AL ducatur, erit $\Delta ALG \left(= \frac{1}{2} AG \times GL = \frac{1}{2} AG \times GD\right)$ = Sectori AGD, adeoque complementalia Segmenta ALI et ADH erunt etiam aequalia. Et haec non tantum Spirali Archimedeae (ubi AIL evadit Parabola Apolloniana) sed et alijs quibuscunque conveniunt, adeo ut omnes eodem negotio in aequales Geometricas converti possint.

Possem plura hujus construendi Problematis Specimina afferre, sed haec sufficiant cùm sint adeò generalia ut quicquid hactenus circa Curvarum Areas inventum fuerit, vel ni fallor inveniri possit, aliquo saltem modo complectantur, et ut plurimum leviori curâ sine solitis ambagibus determinant.

Praecipuus

Præcipuus autem hujus & præcedentis Problematis usus est, ut assumptis Conicis Sectionibus vel quibuslibet notæ magnitudinis Curvis, aliæ Curvæ quæ cum his conferri possunt, investigentur, et earum definientes Æquationes in Catalogum Ordinatim disponantur. Et constructo ejusmodi Catalogo, cum Curvæ alicujus Area quæritur, si Æquatio ejus definiens vel immediatè in Cataloga reperiatur vel in aliam quam Catalogus complectitur transformari potest, exinde cognosces Aream ejus. Quinetiam Catalogus ille determinandis Curvarum Longitudinibus Centris gravitatum, Solidis per Convolutionem generatis, Solidorum superficiebus, & cuilibet fluenti Quantitati per Analogam fluxionem generatæ, invenire potest.

Probl: 9.

Propositæ alicujus Curvæ Aream determinare.

Problematis Resolutio in eo fundatur ut quantitatum fluentium relatio ex relatione fluxionum (per Prob: 2) eliciatur. Et imprimis si recta BD cujus motu quæsita Area AFDB describitur (fig. β.) super Basi AB positione datâ erectè incedat, concipe ut supra parallelogrammum ABEC a parte ejus BE unitatem æquante interea describi: Et posita BE fluxione parallelogrammi erit BD fluxio Areæ quæsitæ.

Dic ergo AB $= x$, & erit etiam ABEC $(= 1 \times x) = x$, et BE $= \dot{x}$; dic insuper Aream AFDB $= z$, et erit BD $= \dot{z}$, ut et $= \frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, eo quod sit $\dot{x} = 1$. Et proin per Æquationem definientem BD simul definitur fluxionum ratio $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, et exinde (p Prob. 2. Cas. 1.) elicietur relatio fluentium quantitatum x & z.

Exempl. 1.

Ubi BD sive $\dot{z}$ valet simplicem aliquam quantitatem.

Detur $\frac{xx}{a} = \dot{z}$ vel $= \frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, Æquatio nempe ad Parabolam, et (per Prob. 2) emerget $\frac{x^3}{3a} = z$. Est ergo $\frac{x^3}{3a}$ sive $\frac{1}{3}$ AB × BD = Areæ Parabolicæ AFDB.

Detur $\frac{x^3}{aa} = \dot{z}$ Æquatio ad Parabolam secundi generis, et (per Prob. 2) emerget $\frac{x^4}{4a^2} = z$, hoc est $\frac{1}{4}$ AB × BD = Areæ AFDB.

Detur $\frac{a^3}{xx} = \dot{z}$, sive $a^3x^{-2} = \dot{z}$ Æquatio ad Hyperbolam secundi generis et emerget $-a^3x^{-1} = z$, sive $-\frac{a^3}{x} = z$, hoc est AB × BD = Areæ infinitæ longæ HDBH (fig. β.) ex altera parte Applicatæ BD jacentis, ut innuit valor negativus.

Atq; ita si detur $\frac{a^4}{x^3} = \dot{z}$, emerget $-\frac{a^4}{2xx} = z$

Præterea sit $ax = \dot{z}\dot{z}$, sive $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = \dot{z}$, Æquatio iterum ad Parabolam et proveniet $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = z$, hoc est, $\frac{2}{3}$ AB × BD = Areæ AFDB.

Sit $\frac{a^3}{x} = \dot{z}\dot{z}$, et fiet $2a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} = z$, sive 2 AB × BD = AFDB

Sit $\frac{a^5}{x^3} = \dot{z}\dot{z}$, et fiet $-\frac{2a^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = z$, sive 2 AB × BD = HDBH

Sit $ax^2 = \dot{z}^3$, et fiet $\frac{3}{5}a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{5}{3}} = z$, sive $\frac{3}{5}$ AB × BD = AFDB.

Et sic in aliis.

Exemp. 2,

Ubi $\dot{z}$ valet plures ejusmodi connexas Quantitates.

Sit $x + \frac{xx}{a} = \dot{z}$, et fiet $\frac{xx}{2} + \frac{xxx}{3a} = z$.

Sit $a + \frac{a^3}{xx} = \dot{z}$, et fiet $ax - \frac{a^3}{x} = z$

Sit $3x^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{xx} - \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} = \dot{z}$, et fiet $2x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{x} - 4x^{\frac{1}{2}} = z$.

Exemp.

Exempl: 3.

Ubi prævia reductio per Divisionem requiritur.

Detur $\frac{aa}{b+x}=\dot{z}$ (Æquatio ad Hyperbolam Apollonianam) et facta in infinitum Divisione, evadet $\dot{z}=\frac{aa}{b}-\frac{aax}{b^2}+\frac{aax^2}{b^3}\ \frac{aax^3}{b^4}$ &c. Et inde (per Prob: 2) ut in secundis Exemplis, obtinebitur $z=\frac{a^2x}{b}-\frac{a^2x^2}{2b^2}+\frac{a^2x^3}{3b^3}-\frac{a^2x^4}{4b^4}$ &c.

Detur $\frac{1}{1+xx}=\dot{z}$, & per Divisionem elicietur $\dot{z}=1-x^2+x^4-x^6$ &c. vel etiam $\dot{z}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}$ &c. Indeque (per Prob. 2) $z=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$ &c. $=$ AFDB, vel $z=-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}$ &c. $=$ HDBH.

Detur $\frac{2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}-3x}=\dot{z}$, et per divisionem evadet $\dot{z}=ax^{\frac{1}{2}}-2x+7x^{\frac{3}{2}}-13x^2+34x^{\frac{5}{2}}$ &c. Et inde (per Prob. 2.) $z=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-xx+\frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{13}{3}x^3+\frac{68}{7}x^{\frac{7}{2}}$ &c.

Exempl: 4.

Ubi prævia reductio per Extractionem Radicum requiritur.

Detur $\dot{z}=\sqrt{aa+xx}$, (Æquatio nempe ad Hyperbolam) et radice ad usque terminos infinitè multos Extractâ evadet $\dot{z}=a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{112a^7}$ &c. Atque inde ut in præcedentibus $z=ax+\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}+\frac{x^7}{112a^5}-\frac{5x^9}{1008a^7}$ &c.

Ad eundem modum si detur $\dot{z}=\sqrt{aa-xx}$ Æquatio scilicet ad Circulum obtinebitur $z=ax\ \frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}-\frac{x^7}{112a^5}-\frac{5x^9}{1008a^7}$ &c.

Atque ita si detur $\dot{z}=\sqrt{x-xx}$, Æquatio iterum ad Circulum proveniet extrahendo radicem $\dot{z}=x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$ &c. Adeoque est $z=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}$ &c.

Sic $\dot{z}=\sqrt{aa+bx-xx}$, Æquatio denuò ad Circulum per Extractionem Radicis dat $\dot{z}=a+\frac{bx}{2a}-\frac{xx}{2a}-\frac{b^2x^2}{8a^3}$ &c. unde (per Prob. 2.) elicitur $z=ax+\frac{bx^2}{4a}-\frac{x^3}{6a}-\frac{b^2x^3}{24a^3}$ &c.

Et sic $\sqrt{\frac{1+axx}{1-bxx}}=\dot{z}$, per debitam reductionem dat
$$\dot{z}=1+\begin{matrix}\frac{1}{2}b\\+\frac{1}{2}a\end{matrix}\,x^2+\begin{matrix}\frac{3}{8}bb\\+\frac{1}{4}ab\\-\frac{1}{8}aa\end{matrix}\,x^4 \ \&c.$$

Unde (per Prob: 2)
$$z=x+\begin{matrix}\frac{1}{6}b\\+\frac{1}{6}a\end{matrix}\,x^3+\begin{matrix}\frac{3}{40}bb\\+\frac{1}{20}ab\\-\frac{1}{40}aa\end{matrix}\,x^5 \ \&c.$$

Sic denique $\dot{z}=\sqrt[3]{a^3+x^3}$, per Extractionem radicis Cubicæ dat $\dot{z}=a+\frac{x^3}{3a^2}-\frac{x^6}{9a^5}+\frac{5x^9}{81a^8}$ &c. Indeque $z=ax+\frac{x^4}{12a^2}-\frac{x^7}{63a^5}+\frac{x^{10}}{162a^8}$ &c. $=$ AFDB vel etiam $\dot{z}=x+\frac{a^3}{3xx}-\frac{a^6}{9x^5}+\frac{5a^9}{81x^8}$ &c. Indeque $z=\frac{x^2}{2}-\frac{a^3}{3x}+\frac{a^6}{36x^4}-\frac{5a^9}{567x^7}$ &c. $=$ HDBH.

Exempl: 5

Ubi prævia reductio per Æquationis Affectæ resolutionem requiritur

Si Curva per Æquationem $\dot{z}^3+a^2\dot{z}+axz-2a^3-x^3=0$ definiatur, extrahe radicem, et proveniet $\dot{z}=a-\frac{x}{4}+\frac{xx}{64a}+\frac{131x^3}{512aa}$ &c. Unde, ut in prioribus obtinebitur $z=ax-\frac{xx}{8}+\frac{x^3}{192a}+\frac{131x^4}{2048a^2}$ &c.

Sin

Sin $\dot{z}^3 - c\dot{z}^2 - 2x^2\dot{z} - c^2\dot{z} + 2x^3 + c^3 = 0$ Sit Æquatio ad Curvam resolutio dabit triplicem radicem nempe $\dot{z} = c + x - \frac{xx}{4c} + \frac{x^3}{32c^2}$ &c. Et $\dot{z} = c - x + \frac{3x^2}{4c} - \frac{15x^3}{32cc}$ &c. Et $\dot{z} = -c - \frac{x^2}{2c} - \frac{x^3}{2cc} + \frac{x^5}{4c^4}$ &c. Et inde trium correspondentium Arearum Valores $z = cx + \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^3}{12c} + \frac{x^4}{120c^2}$ &c.

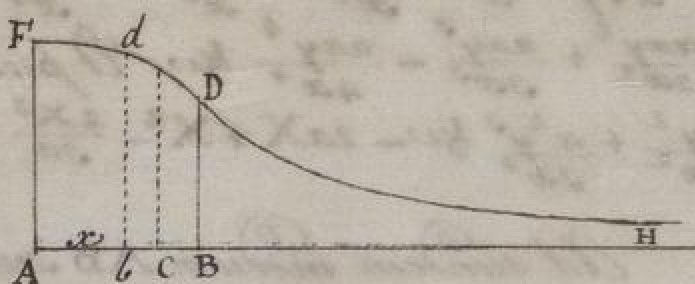
$$z = cx - \tfrac{1}{2}x + \frac{x^3}{4c} - \frac{15x^4}{120c^2} \text{ \&c.}$$

ac $$z = -cx - \frac{x^3}{6c} - \frac{x^4}{8c^2} + \frac{x^6}{24c^4} \text{ \&c.}$$

De Curvis Mechanicis hic nihil adjecio, Siquidem reductio ad formam Geometricarum post ostendetur.

Cæterum cum sic inventi valores z Areis quandoque ad Basis finitam partem AB, quandoque ad partem BH infinitè versus H productam et quandoque ad utramque partem sitis secundum diversos eorum terminos competant: quo debitus Areæ ad quamlibet Basis portionem sitæ valor assignetur Area illa semper ponenda est æqualis differentiæ valorum z partibus Basis ad initium et finem istius Areæ terminatis competentium.

E. G. Ad Curvam quam Æquatio $\frac{1}{1+xx} = \dot{z}$ definit inventum est $z = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$ &c. Jam ut quantitatem Areæ bdDB adjacentis parti Basis bB determinem a valore z qui fit ponendo Ab = x, et (distinctionis gratia scripta X majusculâ pro AB & x minusculâ pro Ab) restat $X - \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{5}X^5$ &c $- x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5$ &c, valor Areæ illius bdDB. Unde si Ab seu x ponatur nullum, habebitur tota Area AFDB $= X - \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{5}X^5$ &c.

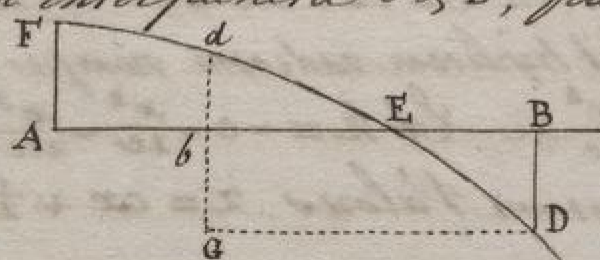


Ad eandem Curvam inventum est etiam $z = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5}$ &c unde rursus juxta præcedentia erit Area illa bdDB $= \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5}$ &c $- \frac{1}{X} + \frac{1}{3X^3} - \frac{1}{5X^5}$ &c. Adeoque si AB seu X statuatur infinitum, Area adjacens bdH a parte H similiter infinite longa valebit $\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5}$ &c. Siquidem posterior Series $-\frac{1}{X} + \frac{1}{3X^3} - \frac{1}{5X^5}$ &c. propter infinitatem denominatorum evanescat.

Ad Curvam Æquatione $a + \frac{a^3}{xx} = \dot{z}$ designatam, inventum est $ax - \frac{a^3}{x} = z$. Unde fit $aX - \frac{a^3}{X} - ax + \frac{a^3}{x} =$ Areæ bdDB. Hæc autem evadit infinita sive x fingatur nulla sive X infinita et proinde utraque Area AFDB et bdH infinitè magna est, ac solæ partes intermediæ (qualis bdDB) exhiberi possunt. Id quod semper evenit ubi Basis x cum in Numeratoribus aliquorum tum in Denominatoribus aliorum terminorum valoris z reperitur. Ubi vero x in Numeratoribus solummodo, ut in primo Exemplo, reperitur; valor z competit Areæ sitæ ad AB eis parallelè incedentem. Et ubi in Denominatoribus tantum, ut in secundo Exemplo; valor ille mutatis omnium terminorum signis, competit Areæ omni ultra parallelè incedentem infinitè productæ.

Siquando

Siquando Curva linea secat Basin inter puncta b & B, puta in E, vice Areæ habebitur Arearum ad diversas Basis partes differentia bdE − BDE, Cui si addatur rectangulum BDGb obtinebitur Area dEDG.



Præcipuè autem notandum est quod ubi in valore ż terminus aliquis per x unius tantùm dimensionis dividitur, Area illi termino correspondens pertinet ad Hyperbolam Conicam, et proinde per infinitam Seriem seorsim exhibenda est: quemadmodum in sequentibus factum.

Sit $\frac{a^3-a^2x}{ax+xx}=\dot{z}$ Æquatio ad Curvam, et per divisionem, fiet $\dot{z}=\frac{aa}{x}-2a+2x-\frac{2x^2}{a}+\frac{2x^3}{aa}$ &c. Indeq; $z=\boxed{\frac{aa}{x}}-2ax+xx-\frac{2x^3}{3a}+\frac{x^4}{2aa}$ &c. Et Area bdDB $=\boxed{\frac{aa}{X}}-2aX+X^2-\frac{2X^3}{3a}$ &c $-\boxed{\frac{aa}{x}}+2ax-xx+\frac{2x^3}{3a}$ &c. Ubi per notas $\boxed{\frac{aa}{X}}$ & $\boxed{\frac{aa}{x}}$ designo Areolas terminis $\frac{aa}{X}$ & $\frac{aa}{x}$ competentes.

Jam ut $\boxed{\frac{aa}{X}}-\frac{aa}{x}$ investigetur, fingo Ab seu x definitam esse, et bB indefinitam seu fluentem lineam, quam itaq; si dicam y, erit $\boxed{\frac{aa}{x+y}}=$ Areæ isti Hyperbolicæ adjacenti bB nempe $\boxed{\frac{aa}{X}}-\boxed{\frac{aa}{x}}$. Est autem, factâ divisione $\frac{aa}{x+y}=\frac{aa}{x}-\frac{aay}{x^2}+\frac{aay^2}{x^3}-\frac{aay^3}{x^4}$ &c. Adeoq; $\boxed{\frac{aa}{x+y}}$ seu $\boxed{\frac{aa}{X}}-\boxed{\frac{aa}{x}}=\frac{aay}{x}-\frac{aay^2}{2x^2}+\frac{aay^3}{3x^3}-\frac{aay^4}{4x^4}$ &c. Et proinde tota Area quæsita bdDB $=\frac{a^2y}{x}-\frac{a^2y^2}{2x^2}+\frac{a^2y^3}{3x^3}$ &c $-2aX+X^2-\frac{2X^3}{3a}$ &c $+2ax-xx+\frac{2x^3}{3a}$ &c.

Ad eundem modum AB seu X pro definita linea adhiberi potuit et sic prodiisset $\boxed{\frac{aa}{X}}-\boxed{\frac{aa}{x}}=\frac{a^2y}{X}+\frac{a^2y^2}{2X^2}+\frac{a^2y^3}{3X^3}+\frac{a^2y^4}{4X^4}$ &c.

Quinetiam si bisecetur bB in C, et assumatur AC esse definitæ Longitudinis, et Cb ac CB indefinitæ. Tum dicto AC $=\varepsilon$, & Cb vel CB $=y$ erit bd $=\frac{aa}{\varepsilon-y}=\frac{aa}{\varepsilon}+\frac{a^2y}{\varepsilon^2}+\frac{a^2y^2}{\varepsilon^3}+\frac{a^2y^3}{\varepsilon^4}+\frac{a^2y^4}{\varepsilon^5}$ &c. indeq; Area Hyperbolica parti Basis bC adjacens $\frac{a^2y}{\varepsilon}+\frac{a^2y^2}{2\varepsilon^2}+\frac{a^2y^3}{3\varepsilon^3}+\frac{a^2y^4}{4\varepsilon^4}$ &c. Erit etiam DB $=\frac{aa}{\varepsilon+y}=\frac{aa}{\varepsilon}-\frac{a^2y}{\varepsilon^2}+\frac{a^2y^2}{\varepsilon^3}-\frac{a^2y^3}{\varepsilon^4}+\frac{a^2y^4}{\varepsilon^5}$ &c. Et inde Area alteri Basis parti CB adjacens $\frac{a^2y}{\varepsilon}-\frac{a^2y^2}{2\varepsilon^2}+\frac{a^2y^3}{3\varepsilon^3}-\frac{a^2y^4}{4\varepsilon^4}+\frac{a^2y^5}{5\varepsilon^5}$ &c. Et harum Arearum Summa $\frac{2a^2y}{\varepsilon}+\frac{2a^2y^3}{3\varepsilon^3}+\frac{2a^2y^5}{5\varepsilon^5}$ &c. valebit $\boxed{\frac{aa}{X}}-\boxed{\frac{aa}{x}}$.

Sic Æquatione $\dot{z}^3+\dot{z}^2+\dot{z}-x^3=0$ ad Curvam existente, ejus Radix erit $\dot{z}=x-\frac{1}{3}-\frac{2}{9x}+\frac{7}{81xx}+\frac{5}{81x^3}$ &c. Unde fit $z=\frac{1}{2}xx-\frac{1}{3}x-\boxed{\frac{2}{9x}}-\frac{7}{81x}-\frac{5}{162xx}$ &c. Et Area bdDB $=\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{3}X-\boxed{\frac{2}{9X}}-\frac{7}{81X}$ &c $-\frac{1}{2}xx+\frac{1}{3}x+\boxed{\frac{2}{9x}}+\frac{7}{81x}$ &c. hoc est $=\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{3}X-\frac{7}{81X}$ &c. $-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{7}{81x}$ &c. $-\frac{4y}{9\varepsilon}-\frac{4y^3}{27\varepsilon^3}-\frac{4y^5}{45\varepsilon^5}$ &c.

Potest

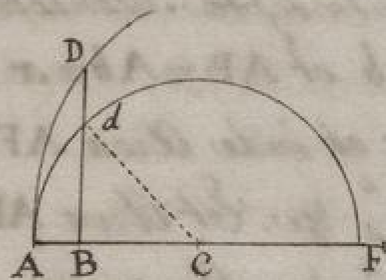
Potest autem terminus iste Hyperbolicus ut plurimum commodè devitari, mutando initium Basis, id est, augendo vel minuendo eam per datam aliquam quantitatem. Quemadmodum in Exemplo priori ubi $\frac{a^3-a^2x}{ax+x^2}=\dot{z}$, erat Æquatio ad Curvam; si faciam b esse initium Basis, et fingens Ab cujuslibet esse determinatæ Longitudinis puta $\frac{1}{2}a$, pro Basis, residuo bB jam scribam x: Hoc est, si diminuam Basem per $\frac{1}{2}a$, scribendo $x+\frac{1}{2}a$ pro x; evadet $\frac{\frac{1}{2}a^3-a^2x}{\frac{3}{4}a^2+2ax+x^2}=\dot{z}$ et per divisionem $\dot{z}=\frac{2}{3}a-\frac{28}{9}x+\frac{200x^2}{27a}$ &c, unde fit $z=\frac{3}{2}ax-\frac{14}{9}x^2+\frac{200x^3}{81a}$ &c $=$ Area bdDB.

Et sic pro initio Basis adhibendo aliud atque aliud ejus punctum, potest Area cujusvis Curvæ modis infinitis exprimi.

Potuit etiam Æquatio $\frac{a^3-a^2x}{ax+x^2}=\dot{z}$, in duas Series infinitas resolvi prodeunte $\dot{z}=\frac{a^3}{x^2}-\frac{a^4}{x^3}+\frac{a^5}{x^4}$ &c. $-a+x-\frac{xx}{a}+\frac{x^3}{a^2}$ &c. ubi terminus per x unius tantùm dimensionis divisus non reperitur. Sed hujusmodi Series, ubi dimensiones x in unius Numeratoribus & alterius Denominatoribus infinitè ascendunt, minus aptæ sunt ex quibus z per computum Arithmeticum obtineri possit, cum in ejus valore numeri pro speciebus substituuntur.

Instituenti computum hujusmodi numerosum postquam valor Areæ in Speciebus habetur, haud aliquid difficile occurret. Tamen in præcedentem doctrinam penitùs illustrandam Exemplum unum & alterum subjungere placuit.

Proponatur Hyperbola AD quam Æquatio $\sqrt{x+xx}=\dot{z}$ designat, utpote cujus vertex est ad A, et uterque Axis æquatur unitati. Ex præcedentibus Area ejus ADB erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}+\frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}-\frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}}$ &c. hoc est, $x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}x^2-\frac{1}{28}x^3+\frac{1}{72}x^4-\frac{5}{704}x^5$ &c. Quæ Series infinitè producitur multiplicando ultimum terminum continuò per succedaneos terminos hujus Progressionis $\frac{1,3}{2,5}x$. $-\frac{1,5}{4,7}x$. $-\frac{3,7}{6,9}x$. $-\frac{5,9}{8,11}x$, $-\frac{7,11}{10,13}x$ &c. Nempe primus terminus $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\times\frac{1,3}{2,5}x$ facit $\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}$, secundum terminum. Hic in $-\frac{1,5}{4,7}x$ facit $-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}$ tertium terminum. Hic in $-\frac{3,7}{6,9}x$ facit $\frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}$ quartum terminum, Et sic in infinitum. Sumatur jam AB cujuslibet longitudinis puta $\frac{1}{4}$, et hunc numerum scribe pro x, ejusque radicem $\frac{1}{2}$, pro $x^{\frac{1}{2}}$ et primus terminus $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ sive $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$ in Decimalem Fractionem reductus evadit, 0,08333333 &c. Hic in $\frac{1,3}{2,5,4}$ facit 0,00625 secundum terminum. Hic in $\frac{-1,5}{4,7,4}$ facit $-$ 0,0002790178 &c tertium terminum. Et sic in infinitum. Terminos autem quos sic gradatim elicio dispono in duas Tabulas Affirmativos nempe in unam, et Negativos in aliam. et addo, ut hic vides.



+ 0,0833333333333333	− 0,0002790178571429
6250000000000	34679066051
271267361111	834465027
5135169396	26285354
144628917	961296
4954581	38676
190948	1663
7963	75
352	4
16	− 0,0002825719389575
1	+ 0,0896109885646518
+ 0,0896109885646518	0,0893284166257043

Dein

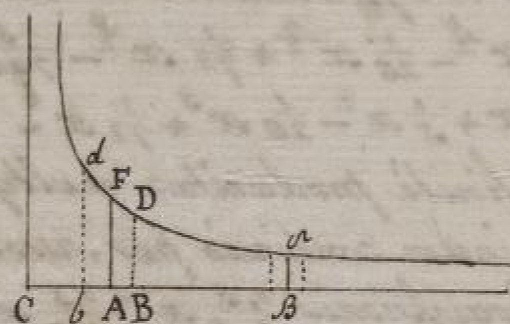
Dein a Summa affirmativorum aufero summam negativorum, et restat 0,0893284166257043 Quantitas Areæ Hyperbolicæ ADB quam quærere oportuit.

Proponatur jam Circulus AdF, quem Æquatio $\sqrt{x-xx} = z$ designat, hoc est cujus Diameter AF sit unitas, et e præcedentibus Area ejus AdB erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}$ &c. In qua Serie cùm termini non differant a terminis Seriei supra exprimentis Aream Hyperbolicam nisi in signis + & − nihil aliud agendum restat quam ut eodem Numerales terminos cum aliis signis nectamus, subducendo nempe connexas ambarum præfatarum Tabularum summas 0,0898935605036193 a primo termino duplicata 0,1666666666666666 et residuum 0,0767731061630473 erit Areæ Circularis portio AdB, posito scilicet AB quadrante Diametri. Atq; ita videre est quod etsi Area Circuli et Hyperbolæ non conferantur ratione Geometrica, tamen utraq; eodem computo Arithmetico prodit.

Inventa Circuli portione AdB, exinde tota Area facile eruitur. Nempe radio dC acto duc Bd seu $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ in BC seu $\frac{1}{4}$ et facti dimidium $\frac{1}{32}\sqrt{3}$ seu 0,0541265877365275 valebit triangulum CdB, quod adde Areæ AdB et habebitur Sector ACd = 0,1308996938995747, cujus Sextuplum 0,7853981633974482 est Area tota.

Et hinc obiter exit Peripheriæ Longitudo 3,1415926535897928, dividendo nempe Aream per Quadrantem Diametri.

Hisce calculum Areæ inter Hyperbolam dFD et ejus Asymptoton CA interceptæ subnectimus. Sit C Centrum Hyperbolæ, & posito CA = a, AF = b et AB = Ab = x; Erit $\frac{ab}{a+x}$ = BD, & $\frac{ab}{a-x}$ = bd; et inde Area AFDB = $bx - \frac{bxx}{2a} + \frac{bx^3}{3a^2} - \frac{bx^4}{4a^3}$ &c. Et Area AFdb = $bx + \frac{bx^2}{2a} + \frac{bx^3}{3a^2} + \frac{bx^4}{4a^3}$ &c. Ac earum Summa bdDB = $2bx + \frac{2bx^3}{3a^2} + \frac{2bx^5}{5a^4} + \frac{2bx^7}{7a^6}$ &c. Ponamus jam CA = AF = 1, et Ab vel AB = $\frac{1}{10}$ existente Cb = 0,9, & CB = 1,1; Et substituendo hos Numeros pro a, b, & x, primus Seriei terminus evadet 0,2; secundus 0,0066666 &c. tertius 0,000004; & sic deinceps, ut vides in hac Tabula.



0,2000000000000000
66666666666666
40000000000
205714286
2222222
18182
154
1
Summa 0,2006706954621511 = Areæ bdDB

Quod si Areæ hujus partes Ad & AD seorsim desiderentur subduc minorem DA e majori dA, & restabit $\frac{bx^2}{a} + \frac{bx^4}{2a^3} + \frac{bx^6}{3a^5} + \frac{bx^8}{4a^7}$ &c. ubi si 1 scribatur pro a & b ac $\frac{1}{10}$ pro x, termini in Decimalis redacti conficient sequentem Tabulam.

0,0100000000000000
5000000000000
3333333333
25000000
200000
1667
14
Summa 0,0100503358535014 = Ad − AD

Jam

Jam si hæc Arearum differentia addatur et auferatur Summæ earum priùs inventæ aggregati dimidium 0,1053605156578263 erit major Area Ad, et residui dimidium 0,0953101798043248 minor AD.

Per easdem Tabulas obtinentur etiam Areæ illæ AD & Ad, ubi AB & Ab ponuntur $\frac{1}{100}$ sive CB = 1,01 & Cb = 0,99 se modo numeri in depressiora loca debitè transferantur, ut hic vide est.

0,020000000000000000	0,000100000000000000
6666666667	500000000
400000	3333
28	
Sum. 0,0200006667066695 = bD	Sum. 0,0001000050003333 = Ad − AD

$\frac{1}{2}$ Aggreg. 0,0100503358535014 = Ad. $\frac{1}{2}$ Resid. 0,0099503308531681 = AD.

Et sic positis AB & Ab $\frac{1}{1000}$ seu CB = 1,001, & Cb = 0,999 obtinebitur Ad = 0,0010005003335835, et AD = 0,0009995003330835.

Ad eundem modum si stantibus CA & AF = 1, ponantur AB & Ab = 0,2 vel = 0,02, vel = 0,002 elicientur Areæ illæ.

Ad = 0,2231435513142097 , et AD = 0,1823215567939546
vel Ad = 0,0202027073175194 ; et AD = 0,0198026272961797
vel Ad = 0,002002 et AD = 0,001

Ex inventis hisce Areis jam facile est alias per solam Additionem et subductionem derivare. Utpote cum sit $\frac{1,2}{0,8}$ in $\frac{1,2}{0,9}$ = 2 Arearum pertinentium ad rationes $\frac{1,2}{0,8}$ & $\frac{1,2}{0,9}$ (hoc est insistentium partibus Basis 1,2 − 0,8, & 1,2 − 0,9) Summa 0,6931471805599453 erit Area AFδB, existente CB = 2 ut notum est. Dein cum sit $\frac{1,2}{0,8}$ in 2 = 3. Arearum pertinentium ad $\frac{1,2}{0,8}$ & 2, summa 1,0986122886681097 erit Area AFδB existente CB = 3. Pariter cùm sit $\frac{2 \text{ in } 2}{0,8}$ = 5, et 2 in 5 = 10, per debitam Arearum Additionem obtinebitur 1,6093379124341004 = AFδB, existente CB = 5, et 2,3025850929940457 = AFδB existente CB = 10. Atque ita cùm sit 10 in 10 = 100, et 10 in 100 = 1000, et √5 in 10 in 0,98 = 7, et 10 in 1,1 = 11, et $\frac{1000 \times 1,001}{7 \times 11}$ = 13, et $\frac{100 \times 1,02}{2 \times 3}$ = 17, et $\frac{1000 \times 0,999}{3 \times 3 \times 3}$ = 37, & 100 × 1,01 = 101, et $\frac{1000 \times 1,002}{2 \times 3}$ = 167, et $\frac{1000 \times 0,998}{2}$ = 499, patet Aream AFδB per Arearum supra inventarum compositionem inveniri posse, existente CB = 100; 1000; 7: aut alio quolibet e recensitis numeris, et stante AB = BF = 1. Id quod significare volui ut Methodus construendo Logarithmorum Canoni aptissima pateret quæ Areas Hyperbolicas (ex quibus Logarithmi facile deducuntur) tot numeris primis correspondentes, quasi per binas tantum haud molestas operationes determinat. Cæterùm cùm Canon iste ex hoc forte præ cæteris feliciter depromi videatur, quid si Constructionem ejus coronidis loco perstringam.

Imprimis itaque assumpto 0 pro Logarithmo Numeri 1, et 1 pro Logarithmo Numeri 10, ut solet, investigandi sunt Logarithmi primorum Numerorum 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 37. dividendo inventas Areas Hyperbolicas per 2,3025850929940457 Aream nempe correspondentem Numero 10, vel quod eodem recidit, multiplicando per ejus reciprocum 0,4342944819032518. Sic enim e.g. si 0,69314718 &c. Area correspondens Numero 2 multiplicetur

per

per 0,43429 &c. facit 0,3010299956639812 Logarithmum Numeri 2.

Deinde Logarithmi Numerorum omnium in Canone qui ex horum Multiplicatione fiunt indagandi sunt per Additionem eorum Logarithmorum, ut solet, et loca vacuo postmodum interpolanda ope hujus Theorematis.

Sit N Numerus Logarithmo donandus, x differentia inter illum et proximos Numeros hinc inde æqualiter distantes quorum Logarithmi habentur, ac d semissis differentiæ Logarithmorum, et quæsitus Logarithmus Numeri N obtinebitur addendo $d + \frac{dx}{2n} + \frac{dx^3}{12n^3}$ &c Logarithmo minoris Numeris. Nam si Numeri exponantur per Cp, CB & CP: et existente rectangulo CBD vel CBδ = 1, ut supra, ac erectis parallelè incedentibus pq & PQ. Si N scribatur pro CB et x pro Βp vel ΒP, erit Area pqQP sive $\frac{2x}{n} + \frac{2x^3}{3n^3} + \frac{2x^5}{5n^5}$ &c. ad Aream pqδΒ sive $\frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3}$ &c ut differentia inter Logarithmos extremorum numerorum sive 2d, ad differentiam inter Logarithmos minoris et medij; quæ proinde erit $\dfrac{\frac{dx}{n} + \frac{dx^2}{2n^2} + \frac{dx^3}{3n^3} \&c}{\frac{x}{n} + \frac{x^3}{3n} + \frac{x^5}{5n} \&c}$ hoc est facta Divisione $d + \frac{dx}{2n} + \frac{dx^3}{12n^3}$ &c.

Hujus autem Seriei duos primos terminos $d + \frac{dx}{2n}$ pro Canone construendo sat accuratas existimo etiamsi ad usq quatuordecim vel forte quindecim figurarum loca Logarithmi producerentur, si modò Numerus Logarithmo donandus non sit minor quam 1000. Quod sane calculum haud difficilem præbere potest siquidem x ut plurimum erit unitas vel Numerus binarius. Non opus est tamen omnia loca beneficio hujus Regulæ interpolare. Nam Logarithmi Numerorum qui prodeunt e Multiplicatione vel Divisione Numeri novissimè transacti per Numeros quorum Logarithmi prius habebuntur obtineri possunt per Additionem vel Subductionem eorum Logarithmorum.

Quinetiam per differentias Logarithmorum et illarum differentiarum secundas differentias, tertiasq si opus est, loca vacua expeditiùs impleri possunt, adhibita tantum prædictâ Regula ubi ad obtinendum illas differentias continuatio aliquot locorum plenorum desideratur.

Eadem Methodo Regulæ pro intercalatione Logarithmorum inveniri possunt ubi e tribus Numeris dantur Logarithmi minoris & medij, vel medij et majoris, idq licet Numeri non sint in Arithmetica Progressione.

Imò et hujus Methodi vestigijs insistendo Regulæ pro construendis Artificialium Sinuum et Tangentium Tabulis sine adminiculo naturalium haud difficulter depromi possunt. Sed hæc in transitu.

Hactenus

Hactenus Curvarum quæ per Æquationes minus Simplices definiuntur Quadraturam mediante reductione in Æquationes ex infinite multis terminis simplicibus constantes ostendimus. Cum verò ejusmodi Curvæ per finitas etiam Æquationes nonnunquam quadrari possint vel saltem comparari cum alijs Curvis quarum Areæ quodammodo pro cognitis habeantur, quales sunt Sectiones Conicæ: Ea propter sequentes duos Theorematum Catalogos in illum usum ope Propositionis 7ª et 8ª, ut promisimus constructos, jam visum est adjungere.

Horum prior exhibet Areas Curvarum quæ quadrari possunt; et posterior complectitur Curvas quarum Areas cum Areis Conicarum Sectionum conferre liceat. In utrisq; literæ Latinæ d, e, f, g & h, datas quavis Quantitates, x & z Bases Curvarum, v & y paralleli incedentes, et s ac t Areas ut supra denotant. Græcæ autem η & θ quantitati z suffixæ, denotant, ejusdem z dimensionum numerum sive sit Integer vel Fractus, sive Affirmativus aut Negativus. Veluti si sit $\eta=3$ erit $z^{\eta}=z^3$, $z^{2\eta}=z^6$, $z^{-\eta}=z^{-3}$ sive $\frac{1}{z^3}$, $z^{\eta+1}=z^4$ & $z^{\eta-1}=z^2$.

Insuper in valoribus Arearum abbreviandi causâ scribitur R vice radicalis illius $\sqrt{e+fz^{\eta}}$ vel $\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}$, qua valor incedentis y afficitur.

Catalogus Curvarum aliquot ad Rectilineas Figuras relatarum ope Prob: 7 constructos.

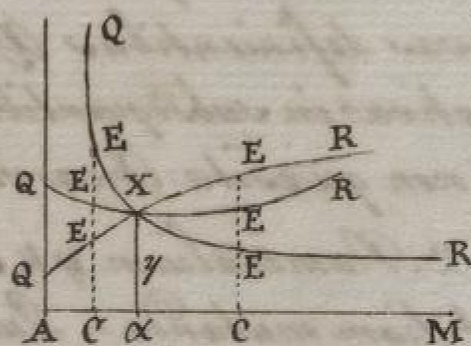
		Curvarum Ord:	Arearum Valores.
I		$dz^{\eta-1}=y.$	$\frac{d}{\eta}z^{\eta}=t.$
II		$\frac{dz^{\eta-1}}{ee+2efz^{\eta}+ffz^{2\eta}}=y.$	$\frac{dz^{\eta}}{\eta e^2+\eta efz^{\eta}}=t$, vel $\frac{-d}{\eta ef+\eta ffz^{\eta}}=t.$
III	1	$dz^{\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y.$	$\frac{2d}{3\eta f}R^3=t.$
	2	$dz^{2\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y.$	$\frac{-4e+6fz^{\eta}}{15\eta f^2}dR^3=t.$
	3	$dz^{3\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y.$	$\frac{16e^2-24efz^{\eta}+30f^2z^{2\eta}}{105\eta f^3}dR^3=t.$
	4	$dz^{4\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y.$	$\frac{-96e^3+144e^2fz^{\eta}-180ef^2z^{2\eta}+210f^3z^{3\eta}}{945\eta f^4}dR^3=t.$
IV	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y.$	$\frac{2d}{\eta f}R=t.$
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y.$	$\frac{-4e+2fz^{\eta}}{3\eta f^2}dR=t.$
	3	$\frac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y.$	$\frac{16e^2-8efz^{\eta}+6f^2z^{2\eta}}{15\eta f^3}dR=t.$
	4	$\frac{dz^{4\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y.$	$\frac{-96e^3+40e^2fz^{\eta}-36ef^2z^{2\eta}+30f^3z^{3\eta}}{105\eta f^4}dR=t.$

His adjiciantur sequentia magis generalia Theoremata quibus via ad altiora sternitur. Ponatur p pro $\sqrt{h+iz^\eta}$

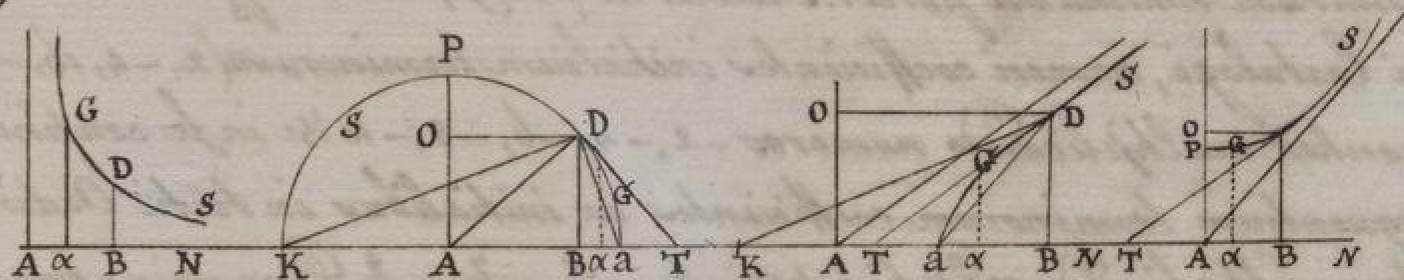
V	1	$\overline{2\theta e z^{\theta-1} + {2\theta f \atop +3\eta f} z^{\theta+\eta-1}} \times \tfrac{1}{2}\sqrt{e+fz^\eta} = y,$	$z^\theta R^3 = t.$
	2	$\overline{2\theta e z^{\theta-1} + {2\theta f \atop +3\eta f} z^{\theta+\eta-1} + {2\theta g \atop +6\eta g} z^{\theta+2\eta-1}}$ in $\tfrac{1}{2}\sqrt{e+fz^\eta+gz^2} = y,$	$z^\theta R^3 = t.$
VI	1	$\dfrac{2\theta e z^{\theta-1} + \overline{2\theta+\eta} \times f z^{\theta+\eta-1}}{2\sqrt{e+fz^\eta}} = y,$	$z^\theta R = t.$
	2	$\dfrac{2\theta e z^{\theta-1} + \overline{2\theta+\eta} \times f z^{\theta+\eta-1} + \overline{2\theta+2\eta} \times g z^{\theta+2\eta-1}}{2\sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}} = y,$	$z^\theta R = t.$
VII	1	$\dfrac{2\theta e z^{\theta-1} + \overline{2\theta-\eta}\, f z^{\theta+\eta-1}}{e+fz^\eta \text{ in } 2\sqrt{e+fz^\eta}} = y,$	$\dfrac{z^\theta}{R} = t.$
	2	$\dfrac{2\theta e z^{\theta-1} + \overline{2\theta-2\eta} \times f z^{\theta+\eta-1} + \overline{2\theta-2\eta} \times g z^{\theta+2\eta-1}}{e+fz^\eta+gz^{2\eta} \text{ in } 2\sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}} = y,$	$\dfrac{z^\theta}{R} = t.$
VIII	1	$\dfrac{2\theta e z^{\theta-1} + \overline{2\theta-2\eta} \times f z^{\theta+\eta-1}}{ee+2efz^\eta+f^2z^{2\eta}} = 2y,$	$\dfrac{z^\theta}{R^2}$ (sive $\dfrac{z^\theta}{e+fz^\eta}$) $= t.$
	2	$\dfrac{2\theta e z^{\theta-1} + \overline{2\theta-2\eta} \times f z^{\theta+\eta-1} + \overline{2\theta-4\eta} \times g z^{\theta+2\eta-1}}{e^2+2efz^\eta+\overline{f^2+2eg} \times z^{2\eta}+2fgz^{3\eta}+ggz^{4\eta}} = 2y,$	$\dfrac{z^\theta}{R^2}$ (sive $\dfrac{z^\theta}{e+fz^\eta gz^{2\eta}}$) $= t.$
IX		$2\theta eh z^{\theta-1} + {\overline{2\theta+3\eta} \times fh \atop +\overline{2g+n} \times ei} \times z^{\theta+\eta-1} + \overline{2\theta+4\eta} \times fi\, z^{\theta+2\eta-1}$ in $\dfrac{\sqrt{e+fz^\eta}}{2\sqrt{h+iz^\eta}} = y,$	$z^\theta R^3 p = t.$
X		$2\theta eh z^{\theta-1} + \overline{2\theta+3\eta}\, fh z^{\theta+\eta-1} + \overline{2\theta+2\eta}\, fi z^{\theta+2\eta-1}$ in $\dfrac{\sqrt{e+fz^\eta}}{h+iz^\eta \text{ in } 2\sqrt{h+iz^\eta}} = y.$	$\dfrac{z^\theta R^3}{p} = t.$

Pfoint

Possint et hujusmodi alia adjici, sed ad alterius generis Curvas quæ cum Conicis Sectionibus conferri possunt jam transeo. Et in hoc Catalogo expositam Curvam linea QEXR designatam habes cujus Basis principium sit A, Basis AC parallelè incidens CE, Areæ principium αX, et Area descripta αXEC. Ejus autem Areæ principium sive terminus initialis (quod ut plurimum vel Basis principio A insistit, vel ad infinitam distantiam recedit) invenitur quærendo Basis longitudinem Aα cum Areæ valor nullus est, et erigendo normalem αX.



Ad eundem modum Conicam Sectionem habes designatam Linea PDG, cujus Centrum sit A, vertex a, Rectangula Semidiametri Aa & AP, Basis principium A vel a, vel α, Basis AB, vel aB, vel αB, Ordinatim Applicata BD, Tangens DT, occurrens AB in T, subtensa aD, et inscriptum vel ascriptum rectangulum ABDO.



Itaq; retentis jam ante definitis literis, erit AC = z, CE = y, αXEC = t AB vel aB = x, BD = v, & ABDP, vel aGDB = s. Et præterea siquando ad alicujus Areæ determinationem duæ Conicæ Sectiones requiruntur posterioris Area dicetur σ, Basis ξ, et parallelè incedens τ.

Catalogus Curvarum aliquot ad Conicas Sectiones relatarum ope Prob: 8 constructus.

		Curvar. form.	Sectionis Conicæ Abscis.	Sectionis Conicæ Ordinat.	Arearum valores.
I	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{e+fz^{\eta}} = y.$	$z^{\eta} = x.$	$\frac{d}{e+fx} = v.$	$\frac{1}{\eta}s = t = \frac{\alpha GDB}{\eta}.$
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{e+fz^{\eta}} = y.$	$z^{\eta} = x.$	$\frac{d}{e+fx} = v.$	$\frac{d}{\eta f}z^{\eta} - \frac{e}{\eta f}s = t.$
	3	$\frac{dz^{3\eta-1}}{e+fz^{\eta}} = y.$	$z^{\eta} = x.$	$\frac{d}{e+fx} = v.$	$\frac{d}{2\eta f}z^{2\eta} - \frac{de}{\eta f^2}z^{\eta} + \frac{ee}{\eta f^2}s = t.$
II	1	$\frac{dz^{\frac{1}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}} = y.$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^{\eta}}} = x.$	$\sqrt{\frac{d}{f} - \frac{e}{f}x^2} = v.$	$\frac{2xv \div 4s}{\eta} = t = \frac{4}{\eta}$ ADGa.
	2	$\frac{dz^{\frac{3}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}} = y.$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^{\eta}}} = x.$	$\sqrt{\frac{d}{f} - \frac{e}{f}x^2} = v.$	$\frac{2de}{\eta f}z^{\frac{1}{2}\eta} + \frac{4es - 2exv}{\eta f} = t.$
	3	$\frac{dz^{\frac{5}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}} = y.$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^{\eta}}} = x$	$\sqrt{\frac{d}{f} - \frac{e}{f}x^2} = v.$	$\frac{2de}{3\eta f}z^{\frac{3}{2}\eta} - \frac{2de^2}{\eta f^2}z^{\frac{1}{2}\eta} + \frac{2e^2xv - 4e^2s}{\eta f^2} = t.$

Antequam Theoremata in his Curvarum Classibus tradita Exemplis illustrare pergam, juvabit observare.

1. Quod cum quantitatum d, e, f, g, h & i, signa omnia in Aquationibus Curvas definientibus Affirmativa posuerim, siquando contingant esse negativa in subsequentibus Basis & incedentis lineæ Sectionis Conicæ, nec non quæsitæ Areæ valoribus mutari debent.

2. Numeralium η & θ ubi negativæ sunt, signa in Arearum valoribus sunt etiam mutanda. Quinetiam ipsarum signis mutatis Theoremata novam formam induere possunt. Sic in quarto formæ posterioris Catalogi Theorema tertium, signo ipsius η mutato, evadit $\frac{d}{z^{-2\eta+1}\sqrt{e+fz^{-\eta}}} = y$, $\frac{1}{z^{-\eta}} = x$, &c. hoc est $\frac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{ez^{2\eta}+fz^{\eta}}} = y$, $z^{\eta} = x$. $\sqrt{fx+ex^2} = v$. $\frac{d}{\eta e}$ in $2xv - 3s = t$. Et sic in alijs.

3. Cujusq; ordinis (si secundum prioris Catalogi demas) Series utrinq; in infinitum continuari potest. Scilicet in Tertij, Quartiq; Ordinis Seriebus priori Catalogi, numeri coefficientes initialium terminorum (2, −4, 16, −96, 868 &c.) generantur multiplicando numeros −2, −4, −6, −8, −10 &c in se continuò; et subsequentium terminorum coefficientes ex initialibus in tertiò Ordine derivantur multiplicando gradatim per $-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{7}{6}, -\frac{9}{8}$, Denominatorum verò coefficientes (1, 3, 15, 105 &c.) ex ducti numerorum 1, 3, 5, 7, 9 &c. in se gradatim oriuntur.

In secundo autem Catalogo Series Ordinum 1, 2, 3, 4, 9 & 10 ope solius Divisionis in infinitè producuntur. Sic habito $\frac{dz^{4\eta-1}}{e+fz^{\eta}} = y$, si divisionem ad usq; convenientem periodum instituas, orietur e.g. $\frac{d}{f}z^{3\eta-1} - \frac{de}{ff}z^{2\eta-1} + \frac{de^2}{f^3}z^{\eta-1} - \frac{\frac{de^3}{f^3}z^{\eta-1}}{e+fz^{\eta}} = y$. Priores tres termini sunt primi Ordinis prioris Catalogi et quartus primæ Speciei hujus Ordinis. Unde constat Aream valere $\frac{d}{3\eta f}z^{3\eta} - \frac{de}{2\eta f^2}z^{2\eta} + \frac{de^2}{\eta f^3}z^{\eta} - \frac{e^3}{\eta f^3}s$; positâ nempe s Area Sectionis Conicæ cujus Basis x sit $= z^{\eta}$, et incedens Applicata $v = \frac{d}{e+fx}$.

Quinti autem Sextiq; Ordinis Series ope duorum Theorematum in Quinto Ordine prioris Catalogi per debitam Additionem vel Subductionem infinitè producuntur, ut et septimi, octaviq; Series ope Theorematum in subsequenti sexto Ordine; ac undecimi Series ope Theorematis in decimo Ordine ejusdem prioris Catalogi. E.G. Si præfati quinti Ordinis Series ultra producenda sit, finge $\theta = -4\eta$, & quinti Ordinis alterius Catalogi Theorema primum evadet $-8\eta ez^{-4\eta-1} - 5\eta fz^{-3\eta-1}$ in $\frac{1}{2}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$, $\frac{R^3}{z^{4\eta}} = t$.

Est autem juxta quartum Theorema hujus producendæ Seriei (scripto $-\frac{5\eta f}{2}$ pro d,) $-\frac{5\eta}{2}fz^{3\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$. $\frac{1}{z^{\eta}} = x$ $\sqrt{fx+exx} = v$, & $\frac{10fv^3 - 15f^2s}{12e} = t$. Quare subductis prioribus ipsarum y ac t valoribus restabunt $4\eta ez^{-4\eta-1}$ − $\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$ $\frac{10fv^3-15f^2s}{12e} - \frac{R^3}{z^{4\eta}} = t$. Ipsisq; in $\frac{d}{4\eta e}$ ductis et pro $\frac{R^3}{z^{4\eta}}$ scripto si placet xv^3, emerget quintum producendæ Seriei Theorema $\frac{d}{z^{4\eta-1}}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$, $\frac{1}{z^{\eta}} = x$, $\sqrt{fx+exx} = v$, & $\frac{10dfv^3 - 15df^2s}{48\eta e^2} - \frac{dxv^3}{4\eta e} = t$.

4. Horum

4. Horum Ordinum nonnulli ex alijs etiam possunt aliter derivari, utpote in posteriori Catalogo 5^{tus}, 6^{tus}, 7^{mus}, & 11^{mus}, ab 8vo, ac 9^{nus} a 10mo. Adeo ut omisisse potuissem nisi quod usui esse possint, quamvis non prorsus necessarii. Nonnullos tamen ordinis omisi quos a primo et secundo, nec non a nono decimoq; derivasse potuissem, utpote qui Denominatoribus magis compositis afficiuntur, et proinde vix ulli unquam usui esse possunt.

5. Si Curvæ alicujus definiens Æquatio ex pluribus Æquationibus diversorum ordinum vel diversarum Specierum ejusdem ordinis componatur, ejus Aream ex Areis correspondentibus componere oportet; cavendo tamen ut Signis + & − recte connectantur. Nam parallele incedentes parallelis incedentibus, & Areæ correspondentes correspondentibus Areis non semper sunt simul addendæ vel simul subducendæ. Sed aliquando harum Summa et illarum differentia sumenda est pro nova linea incedente et Area correspondente constituenda. Et hoc fieri debet cum constituentes Areæ positæ sunt ad diversam partem parallele incedentis. Ut autem hoc incommodum cauti promptiùs devitare possint, singulis Arearum valoribus propria Signa, (etiamsi nonnunquam Negativa, ut fit in posterioris Catalogi Quinto Septimoq; ordine,) præfixi.

6. De Arearum Signis observandum est præterea quod + s vel denotat Aream Conicæ Sectionis Basi adjacentem esse reliquis Quantitatibus in valore t addendam (vide Exempl: 1. sequ.) vel Aream ex altera parte ordinatim applicatæ esse Subducendam. Et contra − s ambiguè denotat Aream Basi adjacentem esse subducendam vel Aream ex altera parte ordinatim applicatæ esse addendam: prout commodum videbitur. Deinde valor ipsius t si affirmativus prodierit, designat Aream Curvæ propositæ adjacentem Basi ejus. Et contra si fuerit Negativus, designat Aream ex altera parte ordinatim applicatæ.

7. Cæterùm ut Area illa certiùs definiatur, prospiciendum est de limitibus ejus. Et quidem limitum ad Basin, parallele incedentem et Curvæ perimetrum, nulla potest esse incertitudo: Sed limes initiales sive principium a quo incipit descriptio ejus varias positiones obtinet. In sequentibus Exemplis vel est ad initium Basis vel ad infinitam distantiam, vel in concursu Curvæ cum Basi ejus. Sed potest alibi locari. Et ubicunq; sit, invenies quærendo illam Basis Longitudinem ad quam valor ipsius t evadit nullus, et parallele incedentem erigendo. Nam erecta illa linea erit limes quæsitus.

8. Siqua pars Areæ infra Basin posita sit, t designabit differentiam ejus et partis supra Basin.

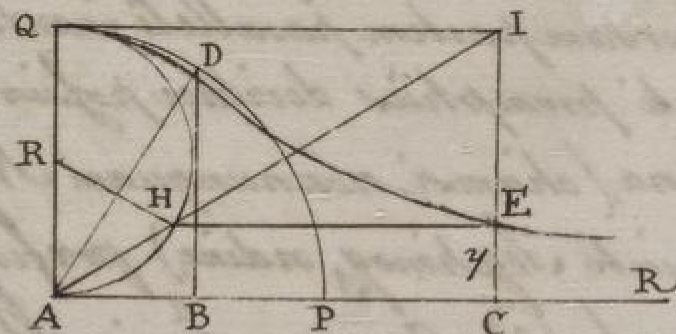
9. Siquando

9. Siquando Dimensiones terminorum in valoribus x, v & t nimis altæ vel nimis depressæ obvenerint, ad justum gradum liceat reducere dividendo vel multiplicando toties per datam quamvis quantitatem quæ vices unitatis gerere fingitur, quoties Dimensiones illæ sint justo altiores vel depressiores.

10. Præter præcedentes Catalogos possunt etiam Catalogi Curvarum ad alias Curvas in suo genere simplicissimas (ut ad $\sqrt{e+fx^3}=v$, vel ad $x\sqrt{e+fx^3}=v$, vel ad $\sqrt{e+fx^4}=v$, &c) relatarum construi, eo ut Curvæ cujuslibet propositæ Aream ex origine simplicissima possimus derivare et cum quibus Curvis affinitatem habeat cognoscere. Cæterum præcedentes tandem Exemplis aliquot illustremus.

Exempl: 1.

Sit QER ejusmodi Conchoidalis, ut Semicirculo QHA descripto: et ad Diametrum AQ erecto AC perpendiculo Si compleatur parallelogrammum QACI, agatur Diagonalis AI semicirculo occurrens in H, et ab H demittatur ad IC normalis HE, punctum E incidat in Curvam: Et quæratur Area ACEQ.



Dic itaque AQ $=a$, AC $=z$, CE $=y$ et propter continuè proportionales AI, AQ, AH, EC, erit EC sive $y=\frac{a^3}{a^2+z^2}$.

Jam ut hæc induat formam Æquationum in Catalogis, finge $\eta=2$, & pro z^2 in Denominatore scribe z^η ac $a^3z^{\frac{1}{2}\eta-1}$ pro a^3 sive a^3z^{1-1} in Numeratore, et emerget $y=\frac{a^3z^{\frac{1}{2}\eta-1}}{a^2+z^\eta}$. Æquatio primæ Speciei secundi Ordinis posterioris Catalogi; collatisque terminis, fiet $d=a^3$, $e=a^2$, & $f=1$; Adeoque $\sqrt{\frac{a^3}{a^2+z^2}}=x$, $\sqrt{a^3-a^2x^2}=v$, & $xv-2s=t$.

Ut autem inventi valores x & v, ad justum dimensionum numerum reducantur selige datam quamlibet quantitatem velut a, per quam tanquam unitatem semel multiplicetur a^3 in valore x, et in valore v dividatur a^3 semel et a^2x^2 bis. Et hoc pacto obtinebis $\sqrt{\frac{a^4}{a^2+z^2}}=x$, $\sqrt{a^2-x^2}=v$, & $xv-2s=t$. Quorum constructio est ejusmodi.

Centro A intervallo AQ describe Quadrantem Circuli QDP in AC cape AB $=$ AH, erige normalem BD Quadranti occurrentem in D et age AD; Et Sectoris ADP duplum æquabitur Areæ quæsitæ ACEQ. Est enim $\sqrt{\frac{a^4}{a^2+z^2}}$ ($=\sqrt{AQ\times EC}=HA$) $=$ AB sive x; Et $\sqrt{a^2-x^2}$ ($=\sqrt{AD^2-AB^2}$) $=$ BD sive v; et $xv-2s=2\Delta ADB-2ABDQ$, vel etiam $=2\Delta ADB+2BDP$, hoc est vel $=-2QAD$, vel $=2DAP$: quorum valorum affirmativus 2DAP competit Areæ ACEQ citra EC, et Negativus 2QAD competit Areæ RECR ultra EC in infinitum protensæ.

Solutiones Problematum sic inventæ nonnunquam concinnari possunt. Sic in hoc Casu actâ RH Circuli QHA Semidiametro, propter Arcus QH, DP æquales, erit Sector QRH dimidium Sectoris DAP, atq; adeò pars quarta Superficiei ACEQ.

Exempl: 2.

Sit AGE Curva quam normæ AEF punctum angulare E describit dum crurum alterum AE interminatum continuò transit per datum punctum A, et alterum EF datæ longitudinis super recta AF positione data prolabitur. Demitte EH ad AF normalem, et comple Parallelogrammum AHEC, ac dictis AC = z, CE = y & EF = a, propter HF, HE, HA, continuo proportionales, erit HA sive y $= \frac{z^2}{\sqrt{a^2 - z^2}}$.

Q C D E z G A I P H F

Jam ut innotescat Area AGEC, finge $z^2 = z^\eta$ sive $2 = \eta$ et inde fiet $\frac{z^{\frac{3}{2}\eta - 1}}{\sqrt{a^2 - z^\eta}} = y$. Ubi cum z sit pactæ Dimensionis in Numeratore, deprime valorem y dividendo per $z^{\frac{1}{2}\eta}$, et fiet $\frac{z^{\eta-1}}{\sqrt{a^2 z^{-\eta} - 1}} = y$, Æquatio Secundæ Speciei Septimi Ordinis posterioris Catalogi. Ac terminis collatis evadet $d=1, e=-1$, et $f = a^2$. Adeoq; $z^2 \left(= \frac{1}{z^{-\eta}}\right) = x^2$, $\sqrt{a^2 - x^2} = v$, & $s - xv = t$. Cum itaq; x & z æquentur, et sit $\sqrt{a^2 - x^2} = v$, Æquatio ad Circulum cujus Diameter est a: Centro A intervallo a sive EF, describatur Circulus PDQ, cui occurrat CE in D, et compleatur parallelogrammum ACDI, eritq; AC = z, CD = v, & Area quæsita AGEC (= $s - xv$ = ACDP − ACDI) = IDP.

Exempl: 3.

Sit AGE Cissois ad Circulum ADQ, Diametro AQ descriptum pertinens. Agatur DCE Diametro normalis, et Curvis occurrens in D et E. Et nominalis AC = z, CE = y, & AQ = a, propter CD, CA, CE continuè proportionales, erit CE sive $y = \frac{zz}{\sqrt{az - zz}}$, ac dividendo per z, fit $y = \frac{z}{\sqrt{az^{-1} - 1}}$. Est itaq; $z^{-1} = z^\eta$, sive $-1 = \eta$, et inde $y = \frac{z^{-2\eta - 1}}{\sqrt{az^\eta - 1}}$, Æquatio tertiæ Speciei, Septimi Ordinis posterioris Catalogi. Collatisq; terminis fit $d=1, e=-1$, & $f = a$. Adeoq; $z \left(= \frac{1}{z^\eta}\right) = x$. $\sqrt{ax - xx} = v$, & $3s - 2xv = t$. Quare est AC = x, CD = v, & inde ACDH = s. Adeoq; 3ACDH − 4ΔADC (= $3s - 2xv = t$) = Areæ Cissoidali ACEGA. Vel quod perinde est, 3 Segment. ADHA = Areæ ADEGA, sive 4 Segment. ADHA = Areæ AHDEGA.

Q D C E d c e K G I H A

Exempl:

Exempl: 4.

Esto PE prima Conchoides veterum, Centro G Asymptoto AL et intervallo LE descripta. Age GAP Axin ejus, ac demitte EC Ordinatim Applicatam; Dictisq AC = z, CE = y, GA = b, & AP = c; propter proportionales AC : CE − AL :: GC : CE, erit CE sive $y = \frac{b+z}{z}\sqrt{c^2-z^2}$.

Jam ut ejus Area PEC exhinc inveniatur, partes applicatæ CE seorsim considerandæ sunt. Et quidem si illa CE dividatur in D ut sit CD = $\sqrt{c^2-z^2}$, ac DE = $\frac{b}{z}\sqrt{c^2-z^2}$; erit CD Ordinatim Applicata Circuli Centro A intervallo AP descripti: Adeoq pars Areæ PDC innotescet, et restabit pars altera DPED invenienda.

Cum itaq DE (pars Applicatæ quacum describitur) valeat $\frac{b}{z}\sqrt{c^2-z^2}$; suppone $2 = \eta$, et evadet $\frac{b}{z}\sqrt{c^2-z^4}$ = DE Æquatio primæ Speciei quinti ordinis posterioris Catalogi. Collatisq terminis, fiet $d = d$, $e = c^2$, & $f = -1$; atq adeò $\frac{1}{z}\left(=\sqrt{\frac{1}{z^4}}\right) = x$, $\sqrt{-1+c^2x^2} = v$, et $2bc^2s - \frac{bv^3}{x} = t$.

His inventis redige ad justum dimensionum numerum multiplicando terminos nimis depressos ac dividendo nimis altos per datam quamvis quantitatem. Id quod si fiet per c, prodibit $\frac{c^2}{z} = x$, $\sqrt{-c^2+x^2} = v$, & $\frac{2bs}{c} - \frac{bv^3}{cx} = t$. Et horum Constructio est ejusmodi.

Centro A, vertice principali P, & Parametro 2AP, Hyperbolam PK describe. Deinde a puncto C Age rectam CK quæ tangat Hyperbolam in K: et erit ut AP ad 2AG ita Area CKPC ad Aream quæsitam DPED.

Exempl: 5.

Norma GFE ita circa Polum G rotante, ut ejus punctum Angulare F super recta AF positione data continuò prolabatur: Concipe Curvam PE a puncto quolibet E in crure EF sito describi. Jam ut inveniatur hujus Area; demitte GA & EH ad rectam AF perpendiculares, et completo parallelogrammo AHEC dic AC = z, CE = y, AC = b, et EF = c; et propter proportionales HF : EH :: AG : AF, erit AF = $\frac{bz}{\sqrt{cc-zz}}$. Adeoq CE sive $y = \frac{bz}{\sqrt{c^2-z^2}} - \sqrt{c^2-z^2}$. Cum autem $\sqrt{cc-zz}$ sit Ordinatim applicata Circuli Semidiametro c descripti: Circa Centrum A describetur talem Circulum PDQ, eiq CD producta occurrat in D et erit DE = $\frac{bz}{\sqrt{c^2-z^2}}$: Cujus Æquationis ope restat Area PDEP vel DERQ determinanda. Supponantur ergo $\eta = 2$, et evadet DE = $\frac{bz^{4-1}}{\sqrt{cc-z^4}}$. Æquatio primæ Speciei quarti Ordinis prioris Catalogi. Et collatis terminis fiet $b = d$, $cc = e$, et $-1 = f$; adeoq $-b\sqrt{cc-zz}\,(= -bR) = t$.

Jam

Jam cum valor t negativus existat, et inde Area per t designata jaceat ultra lineam DE; ut ejus limes initialis inveniatur quære illam ipsius z longitudinem qua t evadit nulla, et invenies esse C. Quare produc AC ad Q ut sit AQ = c, et erige Applicatam QR, et erit DQRED Area illa cujus valor jam inventus est $-b\sqrt{cc-zz}$.

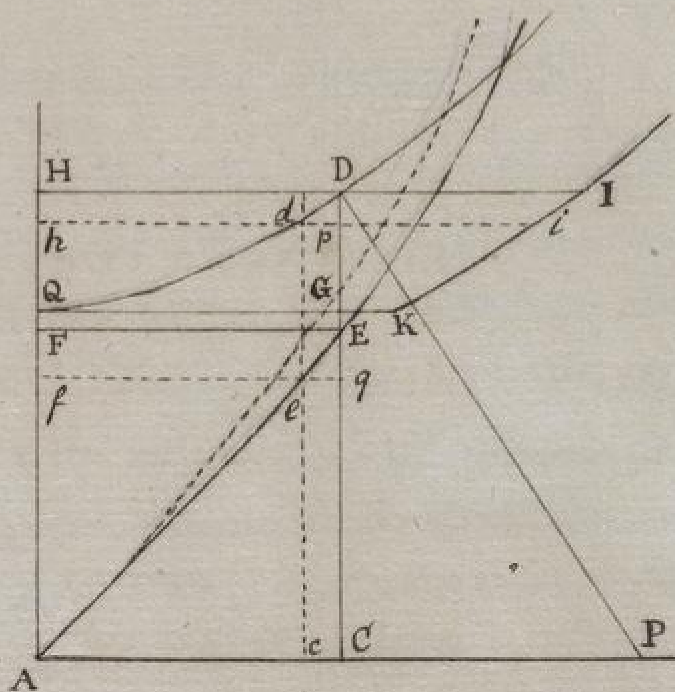
Quod si quantitatem Areæ PDE juxta Basin AC positæ et cum ea coextensæ desideres, possis ignoto limite QR sic determinare. A valore quem t ad Basis longitudinem AC sortita est subduc valorem ejus ad initium Basis; hoc est $a-b\sqrt{c^2-z^2}$ subduc $-bc$ & proveniet quantitas $bc-b\sqrt{c^2-z^2}$ quam quæris. Comple ergo Parallelogrammum PAGK, et ad AP demitte Normalem DM quæ cum GK occurrat in M et erit parallelogrammum PMNK æquale Areæ PDE.

Siquando Æquatio Curvam aliquam definiens non reperiatur in Catalogis, neq; ad simpliciores terminos ope Divisionis vel alio pacto reduci possit: transformanda est in alias affinium Curvarum Æquationes pro more in Prob: 8 ostenso, donec tandem obvenerit aliqua cujus Area ex Catalogis innotescat. Et conatibus omnimodo institutis, si nulla talis obveniat, certum est Curvam propositam neq; cum Figuris Rectilineis neq; cum Conicis Sectionibus comparari posse.

Ad eundem modum cum de Curvis Mechanicis agitur illæ imprimis transformandæ sunt in æquales Geometricas prout in eodem Prob. 8 ostensum fuit, ac deinde Geometricarum Areæ ex Catalogis eliciendæ. Cujus rei accipe sequens Exemplum.

Exempl: 6.

Proponatur Figura Arcuum cujusvis Conicæ Sectionis ad Sinus Rectos Applicatorum determinanda. Utpote sit A Centrum Conicæ Sectionis AQ & AR Semiaxes, CD Ordinatim applicata ad Axin AR, et PD perpendiculum ad punctum D. Sit etiam AE dicta Figura Mechanicæ occurrens CD in E et ex natura præfinita erit CE æqualis Arcui QD. Quæritur itaq; Area AEC, vel Parallelogrammo ACEF completo, quæritur excessus AEF. In quem finem sit (a) Latus rectum Conicæ Sectionis, et (b) Latus transversum sive 2AQ. Sit etiam AC = z & CD = y.



Erit $\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{b}{a}z^2}=y$, Æquatio ad Conicam Sectionem ut notum est. Erit etiam $PC=\frac{b}{a}z$, et inde $PD=\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{bb+ab}{aa}zz}$.

At q;

Atq adeò cùm sit Fluxio Arcus QD ad Fluxionem Basis AC, ut PD ad CD, si Fluxio Basis supponatur 1, erit Arcus illius QD sive Applicatæ CE Fluxio $\sqrt{\frac{\frac{1}{4}b^2+\frac{bb+ab}{aa}zz}{\frac{1}{4}bb+\frac{b}{a}zz}}$, Hanc duc in FE sive z, et proveniet $z\sqrt{\frac{\frac{1}{4}bb+\frac{bb+ab}{aa}zz}{\frac{1}{4}bb+\frac{b}{a}zz}}$ Fluxio Areæ AEF adeoq si in Applicata CD capias $CG=z\sqrt{\frac{\frac{1}{4}bb+\frac{bb+ab}{aa}zz}{\frac{1}{4}bb+\frac{b}{a}zz}}$, Area AGC quam illa CG super AC incedens describet, æquabitur Areæ AEF, et erit AG Curva Geometrica. Quæritur itaq Area AGC. Et in hunc finem substituatur z^η pro z^2 in Æquatione novissima, et evadet $z^{\eta-1}\sqrt{\frac{\frac{1}{4}bb+\frac{bb+ab}{aa}z^\eta}{\frac{1}{4}bb+\frac{b}{a}z^\eta}}$ $=CG$ Æquatio secundæ Speciei undecimi Ordinis posterioris Catalogi. Et collatis utrobiq terminis fit $d=1$, $e=\frac{1}{4}bb=g$, $f=\frac{bb+ab}{aa}$ et $h=\frac{b}{a}$; adeoq $\sqrt{\frac{1}{4}bb+\frac{b}{a}zz}=x$, $\sqrt{-\frac{b^3}{4a}+\frac{a+b}{a}xx}=v$, & $\frac{a}{b}s=t$. Hoc est $CD=x$, $DP=v$, & $\frac{a}{b}s=t$. Et inventorum talis est Constructio.

Ad Q erige QK perpendicularem & æqualem QA, et huic parallelam æqualem vero DP age HI per punctum D. Et Linea KI in quam HI terminatur erit Sectio Conica, Areaq comprehensa HIKQ ad Aream quæsitam AEF ut b ad a, sive ut PC ad AC.

Nota, si mutes Signum b, Sectio Conica cujus Arcui recta CG æquatur, evadet Ellipsis; et præterea si fiat $b=-a$, Ellipsis evadet Circulus: In quo Casu Linea KI fit recta parallela AQ.

Postquam

Postquam Curvæ alicujus Area sic inventa fuerit de Constructionis Demonstratione consulendum est, quacum sine Computo Algebraico quantum liceat contexta orietur Theorema ut evadet publica notitia dignum. Estq; demonstrandi methodus generalis quam sequentibus Exemplis illustrare conabor.

Demonstratio Constructionis in Exempl. 5.

In Arcu PQ sume punctum d proximum ad D, et age de ac dm parallelas DE ac DM, et occurrentis DM et AP in p & t: Et erit DEed momentum Areæ PDEP, et LMml momentum Areæ LMKP. Age Semidiametrum AD, et concipe indefinitè exiguum Arcum Dd esse instar rectæ et Triangula Dpd et ALD erunt similia, adeoq; Dp : pd :: AL : LD. Est autem HF : EH :: AG : AF, hoc est AL : LD :: ML : DE; et proinde Dp : pd :: ML : DE. Quare DP × DE = pd × ML. Hoc est momentum DEed æquale momentum LMml. Et cùm hoc de quibuslibet contemporaneis momentis indeterminatè demonstretur, patet singula momenta Areæ PDEP esse singulis contemporaneis momentis Areæ PLMK æqualis, adeoq; totas Areas ex istis momentis compositas æquari. Q. E. D.

Demonstratio Constructionis in Exemplo 3.

Esto DEed momentum Superficiei AHDE, ac AdDA contemporaneum momentum Segmenti ADH, age Semidiametrum DK, et de occurrat AQ in C, estq; Cc : Dd :: DC : DK. Præterea est DC : QA(2DK) :: AC : DE; Adeoq; Cc : 2Dd (:: DC : 2DK) :: AC : DE. Et Cc × DE = 2Dd × AC. Iam ad Peripheria momentum Dd rectà productum (i:e. ad Tangentem Circuli) demitte Normalem AI, et erit AI æqualis AC; adeoq; 2Dd × AC(= 2Dd × AI) = 4 Triangulis ADd. Quare 4 Triangulis ADd = Cc × DE = momento DEed. Spatij ergo AHDE singula momenta sunt quadrupla momentarum contemporaneorum Segmenti ADH, et proinde totum illud Spatium quadruplum totius Segmenti. Q. E. D.

Demonstratio Constructionis in Exemplo 4.

Parallelam CE age indefinitè parùm distantem ce, et Hyperbolæ Tangentem Ck ac demitto KM rectam ad AP; et ex Hyperbolæ natura erit AC : AP :: AP : AM. Adeoq; $\overline{AG}^2 : \overline{GL}^2 (:: \overline{AC}^2 : \overline{LE}^2$ sive $\overline{AP}^2) :: \overline{AP}^2 : \overline{AM}^2$, ac divisim $\overline{AG}^2 : \overline{AL}^2 (\overline{DE}^2) :: \overline{AP}^2 : \overline{AM}^2 - \overline{AP}^2 (\overline{MK}^2)$. Et inversè AG : AP :: DE : MK. Est autem Areola DEed ad Triangulum CKc ut altitudo DE ad semissem altitudinis KM: Hoc est, ut AG ad $\frac{1}{2}$ AP. Quare omnia Spatij PDE momenta ad omnia contemporanea momenta Spatij PKC sunt ut AG ad $\frac{1}{2}$ AP. Et proinde tota illa Spatia sunt in eadem ratione. Q. E. D.

Demonstratio

Demonstratio Constructionis in Exemplo 6.

Parallelam et proximam CD age cd occurrentem Curvæ AE in e, age hi et fe occurrentes DC in p et q. Et erit ex Hypothesi $Dd=Eq$ Et ex similitudine triangulorum Dd, DCP erit $Dp : Dd\ (Eq) :: CP : PD\ (HI)$. Adeoq; $Dp \times HI = Eq \times CP$, et inde $Dp \times HI$ (moment HIih) : $Eq \times AC$ (moment EFfe) :: $Eq \times CP : EQ \times AC :: CP : AC$. Quare cum PC et AC sint in data ratione lateris transversi ad Latus rectum Conicæ Sectionis QD, et Arearum HIKQ et AEF momenta HIih & EFfe in illa ratione erunt ipsæ Areæ in eadem ratione. Q. E. D.

In hujusmodi Demonstrationibus observandum est quod quantitates pro æqualibus habeo quarum ratio est æqualitatis. Et ratio Æqualitatis censenda est quæ minus differt ab æqualitate quidem qualibet inæqualis ratio potest assignari. Sic in postremâ Demonstratione posui rectangulum $Eq \times AC$, sive FEqf æquale Spatio FEef, quia (propter differentiam Eqe infinite minorem ipsis sive respectu ipsarum nullam) non habent rationem inæqualitatis. Et eadem de causa posui $DP \times HI = HIih$, et sic in alijs.

Hac Methodo probandi Curvas per æqualitatem vel datam rationem momentorum æquales esse vel datam rationem habere hic usus sum quod cum methodis in his rebus usitatis affinitatem habeat, sed magis naturalis videtur quæ genesi Superficierum ex Fluendi motu innititur. Sic si Constructio in Exemplo 2 demonstranda sit; Ex natura Circuli est Fluxio rectæ ID ad Fluxionem rectæ IP, ut AI ad ID: Estq; AI ad ID ut ID ad CE ex Natura Curvæ AGE; et proinde $CE \times \dot{ID} = ID \times \dot{IP}$, sed $CE \times \dot{ID}$ = Fluxioni Areæ ACEG, et $ID \times \dot{IP}$ = fluxioni Areæ PDI, et propterea Areæ illæ æqualiter, fluendo genitæ æquales erunt. Q. E. D.

Plenioris illustrationis gratiâ adjiciam Demonstrationem Constructionis qua Cissoidis Area in Exemplo 3 determinatur: Lineæ punctim notatæ in Schemate deleantur, et agatur DQ et Cissoidis Asymptoton QR: et ex natura Circuli est $\overline{DQ}^2 = AQ \times CQ$, et inde per Prob. 1, $2DQ \times$ flux: ipsius $DQ = AQ \times \dot{CQ}$. Adeoq; $AQ : DQ :: 2\dot{DQ} : \dot{CQ}$. Est et ex natura Cissoidis $ED : AD :: AQ : DQ$. Quare $ED : AD :: 2\dot{DQ} : \dot{CQ}$. Et $ED \times \dot{CQ} = AD \times 2\dot{DQ}$, sive $= 4 \times \frac{1}{2} AD \times \dot{DQ}$. Iam cum DQ perpendicularis sit ad terminum ipsius AD circa A gyrantis, ut $\frac{1}{2} AD \times \dot{QD}$ = fluxioni generanti Aream ADOQ est et ejus quadruplum $ED \times \dot{CQ}$ = fluxioni generanti Cissoidalem Aream QREDO. Et proinde Area illa infinitè longa QREDO generatur quadrupla alterius ADOQ. Q. E. D.

Scholium

Scholium

Per præcedentes Catalogos non tantum Areæ Curvarum, sed et aliæ cujuscunque generis quantitates analoga fluendi ratione generatæ e fluxionibus derivari possunt. Idque mediante hoc Theoremate; quod quantitas cujuscunque generis sit ad unitatem congeneram ut Area Curvæ ad unitatem Superficialem, si modò fluxio quantitatem illam generans sed ad unitatem sui generis ut fluxio generans Aream ad unitatem sui generis, hoc est, ut Linea super Basi normaliter incedens qua Area illa describitur, ad unitatem Linearum. Et proinde si fluxio qualicunque exponatur per ejusmodi lineam incidentem quantitas ab illa fluxiones generata exponetur per Aream ab illa incedente descriptam, vel si fluxio per eosdem terminos Algebraicos cum incedente linea exponatur, quantitas generata exponetur per eosdem cum Area descripta. Æquatio itaque quæ fluxionem cujuscunque generis exhibet quærenda est in prima Columna Catalogorum et valor t in ultima Columna indicabit quantitatem generatam

Quemadmodum si $\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}$ Fluxionem cujuscunque generis exhibeat pone æqualem y, et ut ad formam Æquationum in Catalogis reducatur substitue z^{η} pro z, sic enim evadet $z^{\eta-1}\sqrt{1+\frac{9}{4a}z^{\eta}}=y$, Æquatio primæ Speciei tertij Ordinis prioris Catalogi et collatis terminis fiet $d=1$, $e=1$ $f=\frac{9}{4a}$, et inde $\frac{8a+18z}{27}\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}\left(=\frac{2d}{\eta f}R^3\right)=t$. Est itaque $\frac{8a+18z}{27}\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}$ quantitas quæ generatur fluxione $\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}$.

Atque ita si $\sqrt{1+\frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}$ designat fluxionem per debitam reductionem (extrahendo $z^{\frac{2}{3}}$ e radicali, et scribendo z^{η} pro $z^{-\frac{2}{3}}$) habebitur $\frac{1}{z^{\eta+1}}\sqrt{z^{\eta}+\frac{16}{9a^{\frac{2}{3}}}}=y$, Æquatio secundæ Speciei quinti Ordinis posterioris Catalogi, et collatis terminis fit $d=1$, $e=\frac{16}{9a^{\frac{2}{3}}}$, et $f=1$. Adeoque $z^{\frac{2}{3}}\left(=\frac{1}{z^{\eta}}\right)=xx$, $\sqrt{1+\frac{16xx}{9a^{\frac{2}{3}}}}=v$, et $\frac{3}{2}s\left(=\frac{-2d}{\eta}s\right)=t$. Quibus inventis quantitas per fluxionem $\sqrt{1+\frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}$ generata innotescet ponendo esse ad unitatem sui generis ut Area $\frac{3}{2}s$ ad unitatem Superficialem, vel quod eodem recidit, ponendo quantitatem t non amplius Superficiem significare, sed alterius generis quantitatem quæ est ad unitatem ejusdem generis ut Superficies illa ad unitatem Superficialem. Sic posito quod $\sqrt{1+\frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}$ designet fluxionem linearem imaginor t non amplius Superficiem sed Lineam jam significare eam nempe quæ ad unitatem linearum est ut Areæ quam t juxta Catalogos designat ad unitatem Superficialem, hoc est eam quæ producitur applicando Aream illam ad linearem unitatem. Qua ratione si linearis unitas statuatur e longitudo per præfatam fluxionem generata erit $\frac{3s}{2e}$. Et hoc fundamento Catalogi illi ad Longitudines Curvarum, Contenta Solidorum, et alias quascunque quantitates æque ac Areas Curvarum determinandas applicari possunt.

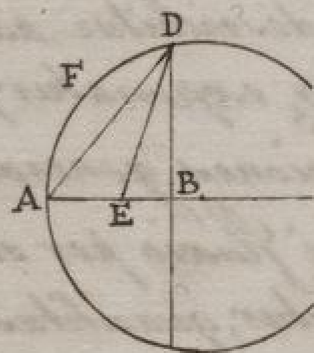
De

De Quæstionibus cognatis.

1. Curvarum Areas per Mechanicam approximare.

Methodus est ut duarum pluriumve Rectilinearum figurarum valores ita componantur inter se ut valorem Areæ Curvæ quam proximè constituant.

Sic ad Circulum AFD quem Æquatio $x - xx = zz$ designat postquam inventus est Areæ AFDB valor $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}$ &c. quærendi sunt aliquot rectangulorum valores, quales sunt ipsius BD×AB valor $x\sqrt{x-xx}$ sive $x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{9}{2}}$ &c. ac ipsius AD×AB valor $x\sqrt{x}$ sive $x^{\frac{3}{2}}$. Dein hi valores per literas quaslibet diversas (quæ numeros indefinitè designent) multiplicandi sunt et addendi Summæq; termini cum correspondentibus terminis valoris Areæ AFDB comparandi ut quantum liceat evadant æquales. Quemadmodum si per ε et f multiplicentur, fiet Summa $\frac{\varepsilon}{+f}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\varepsilon x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}\varepsilon x^{\frac{7}{2}}$ &c. cujus terminis cum terminis hisce $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}$ &c collatis, prodit $\varepsilon + f = \frac{2}{3}$, & $-\frac{1}{2}\varepsilon = -\frac{1}{5}$, sive $\varepsilon = \frac{2}{5}$, & $f\left(= \frac{2}{3} - \varepsilon\right) = \frac{4}{15}$. Adeoq; est $\frac{2}{5}$BD×AB $+ \frac{4}{15}$AD×AB = Areæ AFDB proximè. Scilicet $\frac{2}{5}$BD×AB $+ \frac{4}{15}$AD×AB valet $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{40}x^{\frac{9}{2}}$ &c quod ab Area AFDB subductum relinquit solummodò errorem $\frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{90}x^{\frac{9}{2}}$ &c.



Sic bisectâ AB in E rectanguli AB×DE valor erit $x\sqrt{x - \frac{3}{4}xx}$, sive $x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{9}{128}x^{\frac{7}{2}} - \frac{27}{1024}x^{\frac{9}{2}}$ &c. Et hoc collatum cum rectangulo AD×AB dat $\frac{8DE+2AD}{15}$ in AB = Areæ AFDB, errore tantùm existente $\frac{1}{560}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5760}x^{\frac{9}{2}}$ &c qui semper minor est quam $\frac{1}{1500}$ totius Areæ etiamsi AFDB ponatur quadrans Circuli. Hoc autem Theorema sic enunciari potest. Ut 3 ad 2 ita rectangulum AB in DE plus quinta parte differentiæ inter AD ac DE ad Aream AFDB proxime.

Atq; ita conferendo duo rectangula AB×ED et AB×BD, vel omnia tria rectangula inter se, vel adhibendo adhuc alia rectangula possunt aliæ regulæ excogitari, eæq; tanto exactiores quo plura rectangula adhibentur. Et idem de Area Hyperbolæ ac aliarum Curvarum intelligendum est. Imò et per unicum tantùm rectangulum Area plerumq; commode exhiberi potest, ut in prædicto Circulo si capiatur AE ad AB ut $\sqrt{10}$ ad 5, rectangulum AB×ED erit ad Aream AFDB ut 3 ad 2, errore tantùm existente $\frac{1}{175}x^{\frac{3}{2}} + \frac{11}{2250}x^{\frac{9}{2}}$ &c.

2. Ex datâ Areâ Basem et Incedentem Lineam determinare.

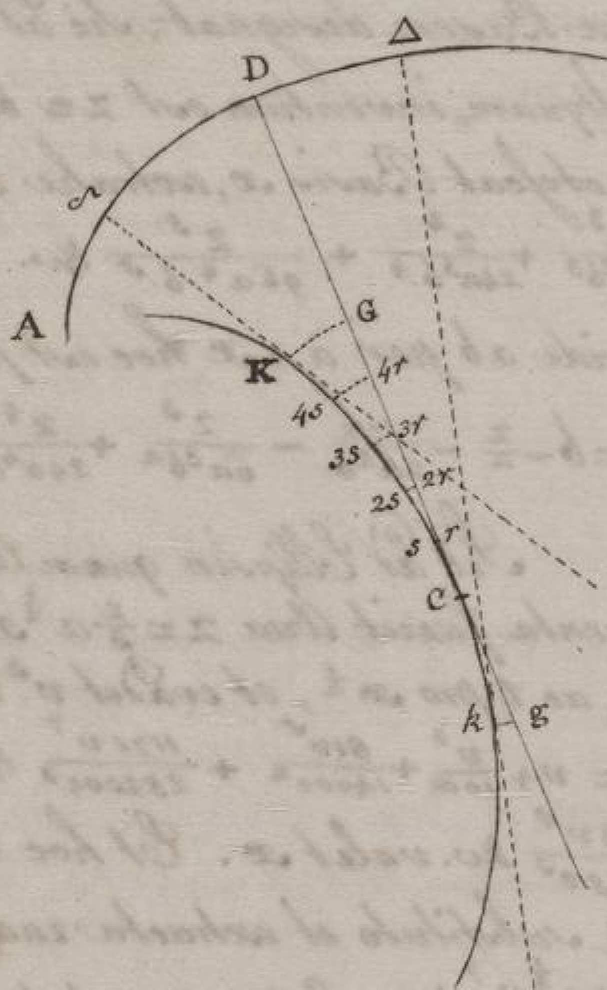
Ubi Area per finitam Aequationem exhibetur nihil occurrit difficultatis. Ubi verò per infinitam exhibetur, affecta radix extrahenda est quae Basem designat. Sic ad Hyperbolam quam Aequatio $\frac{ab}{a+x} = \dot{z}$ designat postquam inventum est $z = bx - \frac{bx^2}{2a} + \frac{bx^3}{3a^2}$ &c. ut ex data Area z vicissim innotescat Basis x, extrahe radicem affectam et proveniet $x = \frac{z}{b} + \frac{z^2}{2ab^2} + \frac{z^3}{6a^2b^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{96a^4b^5}$ &c. Et praeterea si incedens $\dot{z}$ desideretur divide ab per $a+x$ hoc est per $a + \frac{z}{b} + \frac{z^2}{2ab^2} + \frac{z^3}{6a^2b^3}$ &c. et emerget $\dot{z} = b - \frac{z}{a} - \frac{zz}{2a^2b} - \frac{z^3}{6a^3b^2} + \frac{z^4}{24a^4b^3}$ &c.

Sic ad Ellipsin quam Aequatio $ax - \frac{a}{c}xx = \dot{z}\dot{z}$ designat postquam inventa fuerit Area $z = \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{5c} - \frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{28c^2} - \frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{9}{2}}}{72c^3}$ &c. Scribe v^3 pro $\frac{3z}{2a^{\frac{1}{2}}}$ ac t pro $x^{\frac{1}{2}}$, et evadet $v^3 = t^3 - \frac{3t^5}{10c} - \frac{3t^7}{56c^2} - \frac{t^9}{48c^3}$ &c. et extracta radice $t = v + \frac{v^3}{10c} + \frac{81v^5}{1400c^2} + \frac{1171v^7}{252000c^3}$ &c. Cujus quadratum $vv + \frac{v^4}{5c} + \frac{22v^6}{175c^2} + \frac{823v^8}{7875c^3}$ &c. valet x. Et hoc valore pro x in Aequatione $ax - \frac{a}{c}xx = \dot{z}\dot{z}$ substituto et extracta radice, provenit $\dot{z} = a^{\frac{1}{2}}v - \frac{2a^{\frac{1}{2}}v^3}{5c} - \frac{38a^{\frac{1}{2}}v^5}{175cc} - \frac{407a^{\frac{1}{2}}v^7}{2250c^3}$ &c. Adeoque ex data Area z et inde v sive $\sqrt[3]{\frac{3z}{2a^{\frac{1}{2}}}}$ dabitur Basis x et Incedens $\dot{z}$. Quae omnia ad Hyperbolam etiam accommodantur si modo Signum quantitatis c ubique mutetur ubi existit imparium Dimensionum.

Problem: 10.

Curvas pro arbitrio multas invenire quarum Longitudines per finitas Aquationes designari possunt.

Ad hujus resolutionem via per sequentes Positiones sternitur.



1. Si recta DC in Curvam quamvis AD perpendiculariter insistens moveri concipiatur, Singula ejus puncta G, k, r &c describent alias æquidistantes sibiq perpendiculares Curvas GK, gk, rs, &c.

2. Si recta illa hinc inde indefinite producatur ejus extremitates movebuntur ad contrarias motus, quodq ideo dici potest Centrum motionis, idem est cum Centro Curvaturæ quam Curva AD habet ad punctum D, ut supra diximus. Istud autem punctum esto C.

3. Si Lineam AD non circularem esse sed difformiter incurvatam supponamus puta magis Curvam in δ et minus in Δ illud Centrum continuò mutabitur propius accedens ad partes magis Curvas, ut in K, et longius recedens a partibus minus Curvis ut in k, eoq pacto lineam aliquam qualis KCk describet.

4. Hanc a Centro Curvaturæ descriptam lineam recta DC continuò tanget. Nam si rectæ illius punctum D moveat versus δ, ejus punctum G quod interea transit ad K et situm est ad eadem partem Centri C movebit versus eandem plagam (per Positionem 2.dam) Deinde si idem D moveat versus Δ punctum g quod interea transit ad k, situm est ad contrariam partem Centri C movebit ad contrariam plagam, hoc est ad eandem plagam ad quam G in priori casu movebat dum transijt ad K. Et proinde K & k jacent ad eandem partem rectæ DC. Quare cum K & k indeterminatè pro quibuslibet punctis sumantur patet totam illam Curvam jacere ad eandem partem rectæ DC, proindeq ab illa non secari sed tangi tantum.

Hic supponitur lineam δDΔ magis Curvam esse a parte δ continuò et minus a parte Δ. Quod si maxima minimave Curvatura fuerit ad ipsum D, tunc recta DC secabit Curvam KC, sed in Angulo tamen

qui

qui sit quovis rectilineo minor. Quod perinde est ac si tangere dicatur. Imo punctum C in hoc casu terminus est instar Cuspidis, ad quem partes Curvæ obliquissimo concursu desinentes se mutuo contingunt, proindeque a recta DC quæ Angulum illum contactûs dividit rectiùs dicatur tangi quam secari.

5. Recta CG æquantur Curvæ CK. Nam concipe rectæ illius Singula puncta r, 2r, 3r, 4r, &c. describere Curvarum Arcus rs, 2r2s, 3r3s, &c interea dum per motum rectæ illius accedant ad Curvam CK; et Arcus illi, cùm (per Positionem 1^{mam}.) sint Perpendiculares ad rectas quæ (per Posit. 4.) tangunt Curvam CK, erunt etiam Perpendiculares ad Curvam illam. Quare Partes istius CK inter Arcus illos interjectæ quæ propter infinitam parvitatem pro rectis haberi possint æquantur intervallis eorundem Arcuum, hoc est (per Posit. 1.) totidem partibus rectæ CG. Et additis utrinque æqualibus, tota CK æquabitur toti CG.

Idem constare potest imaginando Singulas partes rectæ CG inter movendum Successive applicare ad singulas partes Curvæ CK, easque mensurare, perinde ut rotæ super Planum per gyros promoventis Circumferentia distantiam metitur quam punctum contactus transigit.

Ex his pateat Problema resolvi posse assumendo pro libitu Curvam quamvis AδDΔ, et inde determinando alteram Curvam KCk in qua assumptæ Centrum Curvaturæ versatur.

Ad rectam itaque quamvis positione datam AB demissis perpendiculis DB, CL & in AB sumpto quovis puncto A dictisque AB = x et BD = y pro Curva AD definienda assumatur relatio quævis inter x et y et inde (per Prob. 5.) elicietur punctum C, quo et Curva KC et ejus Longitudo GC, determinatur.

Exempl:

Sit $ax = yy$, Æquatio ad Curvam AD Parabolam nempe Appollonianam. Et per Prob: 5 invenientur $AL = \frac{1}{2}a + 3x$, $CL = \frac{4y^3}{aa}$, ac $DC = \frac{a+4x}{a}\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + ax}$. Quibus habitis Curva KC determinatur per AL et LC, et Longitudo ejus per DC. Utpote cum liberum sit ubivis in Curva KC assumere puncta K et C, supponamus K esse Centrum Curvaturæ Parabolæ ad verticem, & positis perinde AB & BD seu x et y nullis evadet $DC = \frac{1}{2}a$, estque hæc Longitudo AK vel DG quæ subducta a superiori indefinito valore DC relinquit GC seu $KC = \frac{a+4x}{a}\sqrt{\frac{1}{4}aa + ax} - \frac{1}{2}a$.

Iam

Jam si qualis sit hæc Curva quantaq ejus Longitudo, non amplius habita relatione ad Parabolam scire desideretur; Dic $KL = z$ & $LC = v$, et erit $z (= AL - \frac{1}{2}a) = 3x$ seu $\frac{1}{3}z = x$, et $\frac{az}{3} (= ax) = yy$, adeoq $4\sqrt{\frac{z^3}{27a}} (= \frac{4y^3}{aa} = CL) = v$, sive $\frac{16z^3}{27a} = v^2$. Quod indicat Curvam KC esse Parabolam secundi generis. Et pro ejus Longitudine prodit $\frac{3a + 4z}{3a}\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{3}az} - \frac{1}{2}a$, scribendo $\frac{1}{3}z$ pro x in valore CG.

Potest etiam Problema resolvi per Assumptionem Æquationis quæ relationem inter AP et PD (posita nempe P intersectione Basis & Perpendiculi) definiant. Nam dictis $AP = x$ et $PD = y$, concipe CPD per spatium quàm minimum moveri puta ad locum Cpd, inq CD et Cd sumpto $C\Delta$ et $C\delta$, ejusdem cujusvis datæ longitudinis puta 1, et ad CL demissis Δg, $\delta\nu$ perpendiculis quorum Δg (quod dic z) occurrat Cd in f, et completo parallelogrammo $g\nu\delta\varepsilon$, positisq $\dot{x}$, $\dot{y}$ & $\dot{z}$ fluxionibus quantitatum x, y & z, ut supra; erit $\Delta\varepsilon : \Delta f (:: \overline{\Delta\varepsilon}^2 : \overline{\Delta\delta}^2 :: \overline{Cg}^2 : \overline{C\Delta}^2) :: \frac{\overline{CG}^2}{C\Delta} : C\Delta$, et $\Delta f : Pp :: C\Delta : CP$. Et ex æquo $\Delta\varepsilon : Pp :: \frac{\overline{Cg}^2}{C\Delta} : CP$. Est autem Pp momentum Basis AP cujus additamento evadit Ap, ac $\Delta\varepsilon$ contemporaneum momentum perpendiculi Δg cujus ablatione evadit $\delta\nu$. Adeoq $\Delta\varepsilon$ et Pp sunt ut Fluxiones linearum $\Delta g\,(z)$ et $AP\,(x)$ hoc est ut $\dot{z}$ et $\dot{x}$. Quare $\dot{z} : \dot{x} :: \frac{\overline{CG}^2}{C\Delta} : CP$. Et proinde cùm sit $\overline{Cg}^2 (= \overline{C\Delta}^2 - \overline{\Delta g}^2) = 1 - zz$ et $C\Delta = 1$ erit $CP = \frac{\dot{x} - \dot{x}z^2}{\dot{z}}$. Et insuper cùm e tribus $\dot{x}$, $\dot{y}$ & $\dot{z}$ quamlibet pro uniformi fluxione ad quam cæteræ referantur habere liceat, si ista ponatur $\dot{x}$ ejusq quantitas unitas evadet $CP = \frac{1 - zz}{\dot{z}}$.

Præterea est $C\Delta (1) : \Delta g (z) :: CP : PL$; et $C\Delta (1) : Cg (\sqrt{1 - zz}) :: CP : CL$; Adeoq fit $PL = \frac{z - z^3}{\dot{z}}$, et $CL = \frac{1 - zz}{\dot{z}}\sqrt{1 - zz}$. Ac deniq acta pq parallela Arcui infinitè parvo Dd seu perpendiculari DC, erit Pp momentum ipsius DP cujus additamento evadet dp, simul ac AP evadit Ap. Et idcirco Pp & Pq sunt ut Fluxiones ipsarum $AP\,(x)$ et $PD\,(y)$ hoc est ut 1 et $\dot{y}$; Atq adeò cum propter similia Triangula Ppq et $C\Delta g$, $C\Delta$ ac Δg seu 1 et z sint in eadem ratione erit $\dot{y} = z$. Unde talis evadit Problematis resolutio.

E proposita Aequatione quae relationem inter x et y designet quaere relationem fluxionum $\dot{x}$ et $\dot{y}$ (per Prob: 1.) et posito $\dot{x} = 1$, habebitur valor $\dot{y}$ cui z aequatur. Dein substituto z pro $\dot{y}$ ope Aequatione novissima quaere relationes fluxionum $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ (per idem Prob: 1.) et iterum substituto 1 pro $\dot{x}$ obtinebitur valor $\dot{z}$. Quibus habitis fac $\frac{1-\dot{y}\dot{y}}{\dot{z}} = CP$, $z \times CP = PL$ & $CP \times \sqrt{1-\dot{y}\dot{y}} = CL$; et erit C ad Curvam cujus parte quavis KC aequatur recta CG differentia nempe Tangentium ductarum a Punctis C et K perpendiculariter ad Curvam Dd.

Exempl:

Sit $ax = yy$ Aequatio quae relationem inter AP & PD designet, et per Prob. 1. primo erit $a\dot{x} = 2y\dot{y}$, seu $a = 2yz$. Deinde $0 = 2\dot{y}z + 2y\dot{z}$ seu $-\frac{zz}{y} = \dot{z}$. Indeq; fit $CP = \left(\frac{1-\dot{y}\dot{y}}{\dot{z}} =\right) y - \frac{4y^3}{aa}$ $PL = (z \times CP =) \frac{1}{2}a - \frac{2yy}{a}$, et $CL = \frac{aa-4yy}{2aa}\sqrt{4yy-aa}$. Et a CP ac PL ablatis y & x restat $CD = -\frac{4y^3}{aa}$, et $AL = \frac{1}{2}a - \frac{3yy}{a}$. Aufero autem y et x quod CP & PL ubi valores habent affirmativos cadant ad partes puncti P versus D & A, et tunc diminui debent auferendo affirmativas quantitates PD & AD. Ubi vero negativos valores obtinent, cadent ad contrarias partes puncti P & tunc augeri debent, id quod etiam fit auferendo affirmativos quantitates PD & AD.

Jam ut Curvae in qua punctum C locatur Longitudo inter duo quaevis puncta K & C noscatur, quaero Longitudinem tangentis ad punctum K et aufero a CD. Quemadmodum si K sit punctum ad quod tangens terminatur ubi CΔ & Ag seu 1 & z poneantur aequales quodq; proinde in ipsa Basi AP situm est, scribe 1 pro z in Aequatione $a = 2yz$, & prodit $a = 2y$. Quare pro y scribe $\frac{1}{2}a$ in valore CD nempe in $-\frac{4y^3}{aa}$, et oritur $-\frac{1}{2}a$. Estq; haec Longitudo tangentis ad punctum K, sive ipsius DG inter quam & superiorem indefinitam valorem CD differentia $\frac{4y^3}{aa} - \frac{1}{2}a$ est GC cui Curvae pars KC aequatur.

Ut insuper pateat qualis sit haec Curva, ab AL (mutato prius Signo ut evadat affirmativa) aufer AK quae erit $\frac{1}{4}a$ et restabit $KL = \frac{3yy}{a} - \frac{3}{4}a$ quam dic t, et in valore Lineae CL quam dic v scribe $\frac{4at}{3}$ pro $4yy - aa$, & prodibit $\frac{2t}{3a}\sqrt{\frac{4}{3}at} = v$. Seu $\frac{16t^3}{27a} = vv$ Aequatio ad Parabolam secundi generis ut supra.

Siquando

Siquando relatio inter t & v minus commodè ad Æquationem redigi possit, sufficit investigasse tantum Longitudines PC & PL. Quemadmodum si pro relatione in AP & PD assumatur Æquatio $3a^2x + 3a^2y - y^3 = 0$. Inde (per Prob: 1.) primò prodit $a^2 + a^2z - y^2z = 0$, deinde $a^2\dot{z} - 2yz^2 - y^2\dot{z} = 0$. Atque adeo est $z = \frac{aa}{yy-aa}$ & $\dot{z} = \frac{2yz^2}{aa-yy}$. Unde dantur $PC = \frac{1-yy}{\dot{z}}$, & $PL = z \times PC$, quibus punctum C quod ad Curvam situm est determinatur. Et Longitudo Curvæ inter duo ejusmodi puncta e differentia correspondentium duarum Tangentium DC sive PC − y innotescit.

Ex. Gr. Si ponatur $a = 1$, et ad determinandum aliquod Curvæ punctum C sumatur $y = 2$; evadet AP seu $x \left(= \frac{y^3 - 3a^2y}{3aa}\right) = \frac{2}{3}$, $z = \frac{1}{3}$, $\dot{z} = -\frac{4}{9}$, $PC = -2$, & $PL = -\frac{2}{3}$. Deinde ad aliud punctum determinandum si sumatur $y = 3$, evadet $AP = 6$, $z = \frac{1}{8}$, $z = \frac{-3}{256}$, $PC = -84$, & $PL = -10\frac{1}{2}$. Quibus habitis si auferatur y a PC restabit −4 in primo casu, et −87 in secundo casu, pro Longitudinibus DC quarum differentia 83 est Longitudo Curvæ inter inventa duo Puncta C & C.

Hæc ita intelligenda sunt ubi Curva inter puncta duo C et C vel K et C continuatur sine termino quem cuspidi assimilavimus. Sed ubi unus vel plures ejusmodi termini interjacent istis punctis (qui termini inveniuntur per determinationem Maximæ aut Minimæ PC vel DC) Longitudines singularum partium Curvæ inter illos et puncta C vel K seorsim investigari debent & addi.

Prob: 11

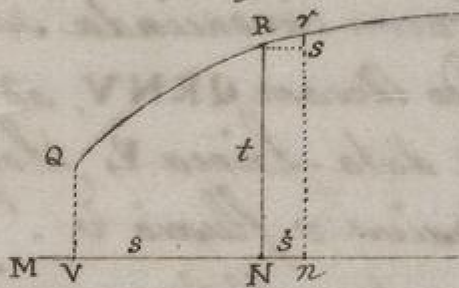
Problem: 11.

Curvas invenire quotascunq quarum Longitudines cum proposita alicujus Curvæ Longitudine, vel cum Area ejus ad datam Lineam applicatâ ope finitarum Æquationum comparari possunt.

Peragitur involvendo Longitudinem Areamve propositæ Curvæ in Æquatione quæ in præcedente Problemate assumitur ad determinandam relationem inter AP & PD. Sed ut z & $\dot{z}$ inde per Prob: 1 eliciantur, fluxio Longitudinis vel Areæ illius priùs investigari debet.

Fluxio Longitudinis ejus determinatur ponendo æqualem radici quadraticæ Summæ quadratorum a Fluxionibus Basis, & perpendiculariter incidentis.

Sit enim RN Linea perpendiculariter incedens super Basi MN & QR Curva proposita ad quam RN terminatur. Dictisq MN = s, NR = t, et QR = v et earum fluxionibus $\dot{s}$, $\dot{t}$ & $\dot{v}$, respective; concipe lineam NR ad locum quam proximum nr promoveri, et demisso ad nr perpendiculo Rs, erunt RS, Sr, & Rr contemporanea Momenta Linearum MN, NR et QR quorum additamentis evadunt Mn, nr et Qr. Et cùm hæc sint inter se ut earundem linearum fluxiones, ac propter Angulum rectum BSr sit $\sqrt{RS^2 + Sr^2} = Rr$, erit $\sqrt{\dot{s}^2 + \dot{t}^2} = \dot{v}$.



Ad determinandas autem fluxiones $\dot{s}$ et $\dot{t}$ duæ requiruntur Æquationes una quæ definiat relationem inter MN et NR seu s et t, unde relatio inter fluxiones $\dot{s}$ et $\dot{t}$ eruenda est, et alia quæ definiat relationem inter MN vel NR ad datam figuram et AP seu x ad quæsitam, unde relatio fluxionis $\dot{s}$ vel $\dot{t}$ ad fluxionem $\dot{x}$ seu 1 innotescit.

Invento $\dot{v}$, fluxiones $\dot{y}$ & $\dot{z}$ per assumptam tertiam Æquationem quæ Longitudo PD sive y definitur investigandæ sunt, et capienda PC $= \frac{1 - \dot{y}\dot{y}}{\dot{z}}$, PL $= \dot{y} \times$ PC, ac DC = PC $- y$, ut in præcedente Problemate.

Exempl: 1.

Sit $as - ss = tt$ Æquatio ad datam Curvam QR, utpote Circulum, $xx = as$ relatio inter lineas AP et MN, et $\frac{2}{3} v = y$, relatio inter Longitudinem datæ Curvæ QR & rectæ PD. Per primam fit $a\dot{s} - 2s\dot{s} = 2t\dot{t}$. seu $\frac{a - 2s}{2t}\dot{s} = \dot{t}$, et inde $\frac{a\dot{s}}{2t}$ ($= \sqrt{\dot{s}\dot{s} + \dot{t}\dot{t}}$) $= \dot{v}$. Per secundam fit $2x = a\dot{s}$, adeoq est $\frac{x}{t} = \dot{v}$. Et per tertiam fit $\frac{2}{3}\dot{v} = \dot{y}$ hoc est $\frac{2x}{3t} = z$, dein hinc fit $\frac{2}{3t} - \frac{2x\dot{t}}{3tt} = \dot{z}$. Quibus inventis capienda sunt PC $= \frac{1 - \dot{y}\dot{y}}{\dot{z}}$, PL $= \dot{y} \times$ PC ac DC = PC $- y$, sive PC $- \frac{2}{3}$ QR. Ubi patet Longitudinem datæ Curvæ QR inveniri non posse quin simul innotescat Longitudo rectæ DC, indeq Longitudo Curvæ ad quam punctum C cadit. Et contra.

Exemp:

Exempl: 2.

Stante $as - ss = tt$, ponatur $x = s$, & $vv - 4ax = 4ay$. Perq; primam invenietur $\frac{a\dot{s}}{2t} = \dot{v}$ ut supra. Per secundam verò $1 = \dot{s}$ atq; adeo $\frac{a}{2t} = v$. Et per tertiam $2\dot{v}v - 4a = 4a\dot{y}$, seu (eliminato $\dot{v}$) $\frac{v}{4t} - 1 = z$, dein hinc $\frac{\dot{v}}{4t} - \frac{v\dot{t}}{4tt} = \dot{z}$.

Exempl: 3.

Ponantur tres Æquationes $aa = st$, $a + 3s = x$, & $x + v = y$. Et per primam (quæ Hyperbolam denotat) evadit $o = \dot{s}t + \dot{t}s$, seu $-\frac{\dot{s}t}{s} = \dot{t}$, et inde $\frac{\dot{s}}{s}\sqrt{ss+tt}\ (= \sqrt{\dot{s}^2 + \dot{t}^2}) = \dot{v}$. Per secundam evadit $3\dot{s} = 1$, adeoq; est $\frac{1}{3s}\sqrt{ss+tt} = \dot{v}$. Et per tertiam fit $1 + \dot{v} = \dot{y}$, sive $1 + \frac{1}{3s}\sqrt{ss+tt} = z$, dein hinc fit $\dot{w} = \dot{z}$, posita scilicet $\dot{w}$ fluxione radicalis $\frac{1}{3s}\sqrt{ss+tt}$, quæ si fingatur æqualis w sive $\frac{1}{9} + \frac{tt}{9ss} = ww$, proveniet inde $\frac{2t\dot{t}}{9ss} - \frac{2tt\dot{s}}{9s^3} = 2w\dot{w}$. Et substituto imprimis $-\frac{\dot{s}t}{s}$ pro $\dot{t}$, deinde $\frac{1}{3}$ pro $\dot{s}$, factaq; divisione per $2w$, habebitur $\frac{-2t^2}{27ws^3} = (\dot{w} =)\ \dot{z}$. Inventis $\dot{y}$ & $\dot{z}$ cætera peraguntur ut in Exemplo primo.

Quod si a quovis Curvæ puncto Q perpendiculum QV ad MN demittatur et Curva invenienda sit cujus Longitudo ex Longitudine quæ oritur applicando Aream QRNV, ad datam aliquam lineam innotescat: ponatur illa data Linea E, Longitudo $\frac{QRNM}{E}$, quæ ex applicatione oritur v, et ipsius v fluxio $\dot{v}$. Et cùm fluxio Areæ QRNV sit ad fluxionem Areæ Parallelogrammi rectanguli super VN ad Altitudinem E constituti ut incedens Linea NB seu t, qua hæc describitur ad incedentem lineam E qua illud eodem tempore describitur; et Longitudinem quæ oriuntur applicando Areas illas ad datam E, hoc est Linearum v et MN seu s fluxiones $\dot{v}$ et $\dot{s}$ sint in eadem ratione, erit $\dot{v} = \frac{\dot{s}t}{E}$. Per hanc itaq; Regulam valor $\dot{v}$ inquirendus est, cæteraq; ut in præcedentibus Exemplis peragenda.

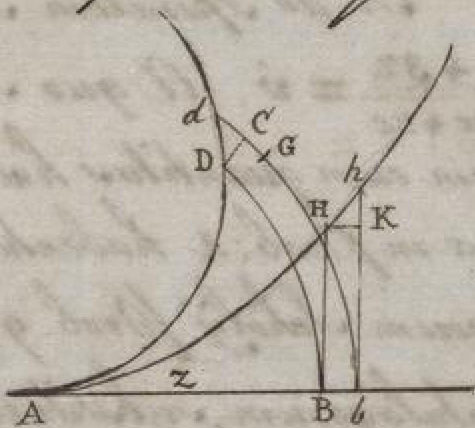
Exempl: 4.

Sit QR Hyperbola quam Æquatio $aa + \frac{ass}{c} = tt$ definit, et inde juxta Prob. 1. evadet $\frac{a\dot{s}s}{c} = t\dot{t}$, sive $\frac{as\dot{s}}{ct} = \dot{t}$. Dein si pro aliis duabus Æquationibus assumantur $x = s$, et $y = v$; prior dabit $1 = \dot{s}$, unde fit $\dot{v}\left(= \frac{\dot{s}t}{E}\right) = \frac{t}{E}$; et posterior dabit imprimis $\dot{y} = \dot{v}$, sive $z = \frac{t}{E}$, dein hinc $\dot{z} = \frac{\dot{t}}{E}$, et substituto $\frac{as\dot{s}}{ct}$, sive $\frac{as}{ct}$ pro $\dot{t}$ evadet $\dot{z} = \frac{as}{EcT}$. Inventis $\dot{y}$ et $\dot{z}$ fac $\frac{1 - \dot{y}\dot{y}}{\dot{z}} = CP$, et $\dot{y} \times CP = PL$, ut in præcedentibus, et inde punctum C adeoq; Curva in quam omnia ejusmodi puncta cadunt determinabitur, cujus Curvæ Longitudo ex Longitudine DC quæ valet $CP - v$ innotescet, uti satis ostendimus.

Est

Est et alia Methodus qua Problema resolvitur, quærendo nempe Curvas quarum fluxiones vel æquentur fluxioni Curvæ propositæ, vel ex illius et aliarum Linearum fluxionibus componantur. Et hæc aliquando usui esse potest præsertim in convertendo Mechanicas Curvas in æquabiles Geometricas. Cujus rei insigne est Exemplum in Spiralibus.

Sit AB recta positione data BD Arcus super AB tanquam Basi incedens ac interea retinens A pro Centro, ADd Spiralis ad quam Arcus ille perpetim terminatur bd Arcus quam proximus, sive locus in quem Arcus BD dum incedit proxime movetur, DC perpendicularis ad Arcum bd, dG differentia Arcuum Att alia Curva Spirali AD æqualis, BH recta super AB normaliter incedens ac terminata ad Curvam AH, bh locus quam proximus in quem recta illa incedit, et HK perpendicularis ad bh. Et in Triangulis infinite parvis DCd ac HKH, cum DC et HK æqualia sint eidem tertio Bb, indeq sibi mutuo æqualia, ac Dd et Hh ex Hypothesi sint correspondentes partes æqualium Curvarum et inde etiam æqualia; nec non Anguli ad C et K recti; tertia etiam latera dC et hK æqualia erunt. Quare cùm insuper sit AB : BD :: Ab : bC :: Ab − AB (Bb) : bC − BD (CG). Adeoq $\frac{BD \times Bb}{AB} = CG$; si hoc auferatur a dG, restabit $dG - \frac{BD \times Bb}{AB} (= dC) = hK$. Dic itaq $AB = z$, $BD = v$ et $BH = y$, et earum fluxiones $\dot{z}$, $\dot{v}$ & $\dot{y}$ respective; et cum Bb, dG et hK sint earundem contemporanea momenta quorum additamentis evadunt Ab, bd et bh, et proinde inter se sint ut fluxiones, ideo pro momentis in Æquatione novissima substituantur fluxiones juxta et notæ pro lineis et emerget $\dot{v} - \frac{v\dot{z}}{z} = \dot{y}$. Ubi si e fluxionibus $\dot{z}$ pro æquabili habeatur et supponatur unitas esse ad quam cæteræ referantur evadet $\dot{v} - \frac{v}{z} = \dot{y}$.



Quamobrem data per Æquationem aliquam relatione inter AB et BD (sive x et v) qua Spiralis definiatur, dabitur (per Prob: 1.) Fluxio $\dot{v}$, et inde etiam Fluxio $\dot{y}$ ponendo æqualem $\dot{v} - \frac{v}{z}$. Atq hæc per Prob: 2 dabit lineam y sive BH cujus est Fluxio.

Exempl: 1.

Si detur $\frac{zz}{a} = v$ Æquatio nempe ad Spiralem Archimedeam, inde per Prob: 1. elicietur $\frac{2z}{a} = \dot{v}$. A quo aufer $\frac{v}{z}$ sive $\frac{z}{a}$, et restabit $\frac{z}{a} = \dot{y}$ et inde per Prob: 2, fit $\frac{zz}{2a} = y$. Quod indicat Curvam AH cui hæc Spiralis AD æquatur esse Parabolam Apollonianam cujus latus rectum existit $2a$; sive cujus incedens BH perpetuo æquatur semissi Arcus BD.

Exemp. 2.

Exempl: 2.

Si proponatur Spiralis quam Æquatio $z^3 = av^3$, sive $v = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$ definit, emerget per Prob: 1 $\frac{3z^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} = \dot{v}$; A quo si auferatur $\frac{v}{z}$ seu $\frac{z^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$ restabit $\frac{z^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} = \dot{y}$, et inde per Prob: 2. producetur $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}} = y$. Hoc est $\frac{1}{3}$ BD = BH, existente AH Parabola secundi generis.

Exempl: 3.

Si ad Spiralem sit $z\sqrt{\frac{a+z}{c}} = v$. Exinde per Prob: 1. elicietur $\frac{2a+3z}{2\sqrt{ac+zc}} = \dot{v}$. A quo si auferatur $\frac{v}{z}$ sive $\sqrt{\frac{a+z}{c}}$, restabit $\frac{z}{2\sqrt{ac+zc}} = \dot{y}$. Iam cum quantitas hæc Fluxione $\dot{y}$ generata nequeat inveniri per ea quæ in Prob: 2 habentur, nisi fiat resolutio in infinitam Seriem; juxta tenorem Scholij Prob. 9. reduco ad formam Æquationum in prima Columna Catalogorum, substituendo z^{η} pro z, evadit $\frac{z^{2\eta-1}}{2\sqrt{ac+cz^{\eta}}} = \dot{y}$, Æquatio nempe secundæ Speciei quarti ordinis prioris Catalogi. Et conferendo terminos fit $d = \frac{1}{2}$, $e = ac$ et $f = c$, adeoque $\frac{z-2a}{3c}\sqrt{ac+cz}\,(=t) = y$. Quæ Æquatio est ad Curvam Geometricam AH cui Spiralis AD æquatur.

Problem:

Problem:

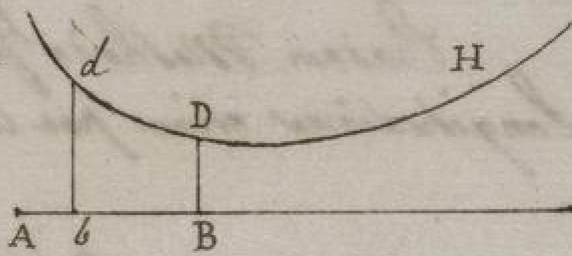
Curvarum Longitudines determinare.

Fluxionem Curvæ lineæ in superiore Problemate ostendimus æqualem esse radici Quadraticæ Summæ Quadratorum a fluxionibus Basis et perpendiculariter Incidentis. Et proinde si Basis fluxionem pro uniformi ac determinata mensura, nimirum unitate, ad quam cæteræ Fluxiones referantur, habeamus, et insuper per Æquationem quæ Curvam definit quæramus Fluxionem Incidentis, habebitur Fluxio Curvæ lineæ a qua Longitudo ejus per Prob: 2. elicienda est.

Exempl: 1.

Proponatur Curva FDH quam Æquatio $\frac{z^3}{aa}+\frac{aa}{12z}=y$ definit, posito scilicet $z=$ Basi AB, ac $y=$ Incedenti DB: Et ex Æquatione illa per Prob: 1. elicietur $\frac{3zz}{aa}-\frac{aa}{12zz}=\dot{y}$, existente nimirum 1 fluxione ipsius z et $\dot{y}$ fluxione y. Dein additis fluxionum Quadratis fit Summa $\frac{9z^4}{a^4}+\frac{1}{2}+\frac{a^4}{144z^4}=\dot{t}\dot{t}$, et extracta radice $\frac{3zz}{aa}+\frac{aa}{12zz}=\dot{t}$, indeq per Prob: 2, $\frac{z^3}{aa}-\frac{aa}{12z}=t$, ubi $\dot{t}$ fluxionem Curvæ ac t Longitudinem designat.

Itaq si cujusvis portionis Curvæ hujus puta dD Longitudo desideretur a punctis d ac D demitte ad AB perpendicula db ac DB et in valore t substitue quantitates Ab et AB seorsim pro z ac differentia productorum erit Longitudo quæsita dD. Quemadmodum si sit $\mathrm{Ab}=\frac{1}{2}a$ et $\mathrm{AB}=a$, scripto $\frac{1}{2}a$ pro z evadet $t=-\frac{a}{24}$, dein scripta a pro z evadet $t=\frac{11a}{12}$, a quo si prior valor auferatur restabit $\frac{23a}{24}$ pro Longitudine dD. Vel si Ab tantum definiatur esse $\frac{1}{2}a$ et AB spectetur indefinitè — restabit $\frac{z^3}{aa}-\frac{aa}{12z}+\frac{a}{24}=\mathrm{dD}$.



Quod si cupias noscere portionem Curvæ quam t designat, finge valorem t æquari nihilo, et evadet $z^4=\frac{a^4}{12}$, sive $z=\frac{a}{\sqrt[4]{12}}$. Adeoq si sumatur $\mathrm{Ab}=\frac{a}{\sqrt[4]{12}}$, et erigatur bd, Longitudo Arcus dD erit t sive $\frac{z^3}{aa}-\frac{aa}{12z}$. Et hæc de alijs Curvis generaliter intelligenda sunt.

Ad eundem modum quo hujus Longitudinem determinavimus si pro alia Curva definienda proponatur Æquatio $\frac{z^4}{a^3}+\frac{a^3}{32z^2}=y$, proveniet $\frac{z^4}{a^3}-\frac{a^3}{32z^2}=t$, vel si proponatur $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}=y$, proveniet $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}=t$, vel generaliter si sit $cz^{\theta}+\frac{z^{2-\theta}}{4\theta\theta c-8\theta c}=y$, ubi θ pro quolibet numero sive integro sive fracto designando adhibetur, erit $cz^{\theta}-\frac{z^{2-\theta}}{4\theta\theta c-8\theta c}=t$.

Exempl: 2.

Proponatur Curva quam Æquatio $\frac{2aa+2zz}{3aa}\sqrt{aa+zz}=y$ definit, et per Prob: 1. obtinebitur $\dot{y}=\frac{4a^4x+8a^2x^3+4x^5}{3a^4y}$, sive exterminato y, $\dot{y}=\frac{2z}{aa}\sqrt{aa+zz}$ cujus quadrato adde 1, et Summa erit $1+\frac{4zz}{aa}+\frac{4z^4}{a^4}$, ejusq radix $1+\frac{2z^2}{aa}=\dot{t}$, unde per Prob: 2 obtinebitur $z+\frac{2z^3}{3a^2}=t$.

Exempl.

Exempl: 3.

Proponatur Parabola secundi generis ad quam Æquatio est $z^3 = ay^2$, seu $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = y$, et inde (per Prob: 1.) elicietur $\frac{3z^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} = \dot{y}$, adeoq est $\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}$ $(=\sqrt{1+\dot{y}\dot{y}}) = \dot{t}$. Iam cum Longitudo per fluxionem $\dot{t}$ generata nequeat inveniri per Prob: 2 absq reductione in infinitam Seriem simplicium terminorum, consulo Catalogos ad Prob: 9, et juxta ea quæ in Scholio ejus habentur prodit $t = \frac{8a+18z}{27}\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}$.

Et sic Parabolarum $z^5 = ay^4$, $z^7 = ay^6$, $z^9 = ay^8$, &c, Longitudines inveniri possunt.

Exempl: 4.

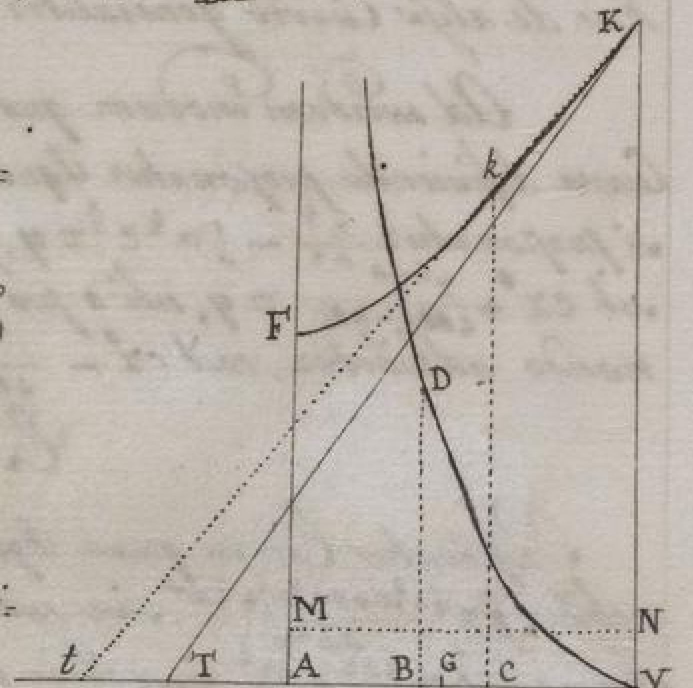
Proponatur Parabola ad quam Æquatio est $z^4 = ay^3$, sive $\frac{z^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = y$, et inde per Prob: 1. orietur $\frac{4z^{\frac{1}{3}}}{3a^{\frac{1}{3}}} = \dot{y}$. Adeoq $\sqrt{1+\frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}$ $(=\sqrt{\dot{y}\dot{y}+1}) = \dot{t}$. Quo invento consulo Catalogos juxta Scholium prædictum, et facta collatione cum secundo Theoremate quinti Ordinis posterioris Catalogi, prodit $z^{\frac{1}{3}} = x$, $\sqrt{1+\frac{16xx}{9a^{\frac{2}{3}}}} = v$, et $\frac{3}{2}s = t$. Ubi x designat Basim, y Ordinatim applicatam, et s Aream Hyperbolæ, atq t Longitudinem quæ oritur applicando Aream $\frac{3}{2}s$ ad unitatem Linearum.

Eadem Methodo Parabolarum $z^6 = ay^5$, $z^8 = ay^7$, $z^{10} = ay^9$, &c. Longitudines etiam per Aream Hyperbolæ determinantur.

Exempl: 5.

Proponatur Cissois Veterum, et existente ad eam Æquatione $\frac{aa-2az+zz}{\sqrt{az-zz}} = y$, inde per Prob: 1. elicietur $\frac{-a-2z}{2zz}\sqrt{az-zz} = \dot{y}$, et consequenter $\frac{a}{2z}\sqrt{\frac{a+3z}{z}}$ $(=\sqrt{\dot{y}\dot{y}+1}) = \dot{t}$. Quo scribendo z^4 pro $\frac{1}{z}$ seu z^{-1}, evadit $\frac{a}{2z}\sqrt{az^4+3} = \dot{t}$, Æquatio primæ Speciei quinti Ordinis posterioris Catalogi. Et collatis terminis fit. $\frac{a}{2} = d$, $3 = e$ & $a = f$; adeoq $z (=\frac{1}{z^4}) = x^2$, $\sqrt{a+3xx} = v$, et $6s - \frac{2v^3}{x}$ $(=\frac{4de}{4f}$ in $\frac{v^3}{2ex} - s) = t$. Et adhibita a pro unitate per cujus Multiplicationem vel Divisionem hæ quantitates ad justum dimensionum numerum reducantur; evadit $az = xx$, $\sqrt{aa+3xx} = v$, & $\frac{6s}{a} - \frac{2v^3}{ax} = t$. Quorum hæc est Constructio.

Existente VD Cissoide, Diametro Circuli ad quem aptatur, AF Asymptoto ejus ac DB perpendiculari ad AV; cum Semiaxe AF = AV et Semiparametro AG = $\frac{1}{3}$ AV describatur Hyperbola FkK, et inter AB & AV sumpta AC media proportionali, erigantur ad C & V perpendicula Ck & VK, et agantur kt et KT rectæ Tangentes Hyperbolam in k & K, et occurentes AV in t ac T, et ad AV constituatur rectangulum AVNM æquale Spatio TKkt; et Cissoidis VD Longitudo erit Sexcupla Altitudinis VN.



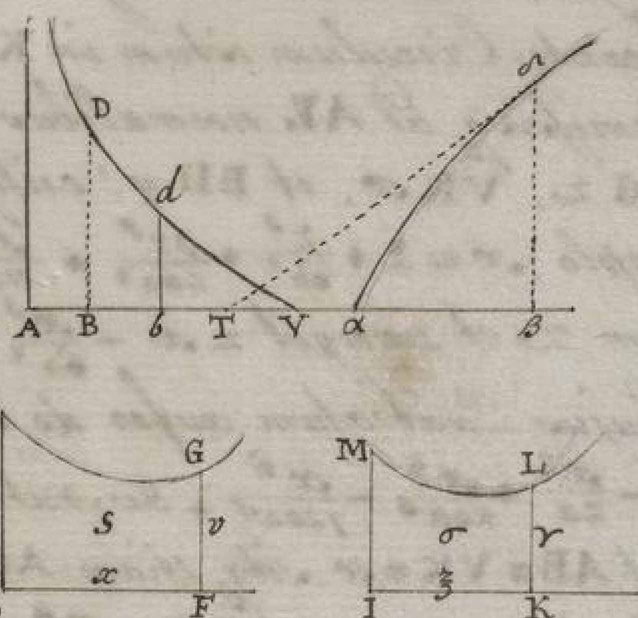
Exempl: 6.

Existente Ad (fig. pag.) Ellipsi quam Æquatio $\sqrt{az-zzz}=y$ definit: proponatur Curva Mechanica AD talis ut si BD seu y producatur donec huic Curvæ ad D occurrat, sit BD æqualis Arcui Ellipticæ Ad. Jam quo hujus Longitudo determinetur Æquatio $\sqrt{az-zzz}=y$, dabit $\frac{a-4x}{2\sqrt{az-zzz}}=\dot{y}$. Cujus Quadrato si 1 addatur prodit $\frac{aa-4az+8zz}{4az-8zz}$ Quadratum fluxionis Arcus Ad, et huic si iterum addatur 1, provenit $\frac{aa}{4az-8zz}$ cujus radix $\frac{a}{2\sqrt{az-zzz}}$ est fluxio Curvæ Lineæ AD. Ubi si e radicali extrahatur z et pro z^{-1} scribatur z^{η}, habebitur $\frac{a}{zz\sqrt{az^{\eta}-2}}$ fluxio primæ Speciei septimi Ordinis posterioris Catalogi; Collatisq; terminis exibunt $d=\frac{1}{2}a$, $e=-2$, et $f=a$, adeoq; $z(=\frac{1}{z^{\eta}})=x$, $\sqrt{ax-2xx}=v$, et $\frac{8s}{a}-\frac{4xv}{a}+v$ $(=\frac{8de}{\eta f}$ in $s-\frac{1}{2}xv-\frac{fv}{4e})=t$.

Quorum Constructio est ut, ad Ellipsis Centrum C acta recta dC, constituatur super AC parallelogrammum æquale Sectori ACd, et duplum altitudinis ejus ponatur esse Longitudo Curvæ AD.

Exempl: 7.

Existente $A\beta=\varphi$ et $\alpha\delta$ Hyperbola ad quam Æquatio sit $\sqrt{-a+b\varphi\varphi}=\beta\delta$, actaq; δT Tangente ejus; proponatur Curva VdD, cujus Basis AB sit $\frac{1}{\varphi\varphi}$, et normaliter incedens BD Longitudo quæ oritur applicando Aream $\alpha\delta T\alpha$ ad unitatem Linearum. Jam ut hujus VD Longitudo determinetur, quæro fluxionem Areæ $\alpha\delta T\alpha$ cum AB uniformiter fluit, et invenio esse $\frac{a}{4bz}\sqrt{b-az}$, posita AB = z et fluxione ejus unitate. Nam est $AT=\frac{a}{b\varphi}=\frac{a}{b}\sqrt{z}$, ejusq; fluxio $\frac{a}{2b\sqrt{z}}$ cujus dimidium ductum in Altitudinem $\beta\delta$ seu $\sqrt{-a+\frac{b}{z}}$ est fluxio Areæ $\alpha\delta$T descriptæ per tangentem δT. Quare fluxio illa est $\frac{a}{4bz}\sqrt{b-az}$, atq; hæc applicata ad unitatem fit fluxio incedentis BD. Hujus Quadrato $\frac{aab-a^3z}{16b^2z^2}$ adde 1 quadratum fluxionis ipsius AB & prodit $\frac{aab-a^3z+16b^2z^2}{16b^2z^2}$, cujus radix $4\frac{1}{b}z\sqrt{a^2b-a^3z+16bz^2}$ est fluxio Curvæ VD. Est autem hæc fluxio primæ Speciei sexti Ordinis posterioris Catalogi, collatisq; terminis exeunt $\frac{1}{4b}=d$, $aab=e$, $a^3=f$, $16b^2=g$, adeoq; $z=x$, & $\sqrt{a^2b-a^3x+16b^2x^2}=v$ (Æquatio ad unam Conicam Sectionem puta HG, cujus Area EFGH sit s, existente EF = x, et FG = v:) Item $\frac{1}{z}=\mathfrak{z}$, et $\sqrt{16bb-a^3\mathfrak{z}+ab\mathfrak{z}^2}=\gamma$ (Æquatio ad aliam Conicam Sectionem, puta ML cujus Area IKLM sit σ, existente IK = $\mathfrak{z}$, & KL = γ:) Denique $\frac{2aabb\mathfrak{z}\gamma-a^3b\gamma-a^4v-4aabb\sigma-32abbs}{64b^4-a^4}=t$.



Quare ut Curvæ VD portionis cujuscunq; Dd Longitudo noscatur demitte db normalem ad AB fingeq; Ab = z, & exinde per jam inventa quære t, dein finge AB = z & exinde etiam quære t, & horum duorum t differentia erit Longitudo Dd. Exempl:

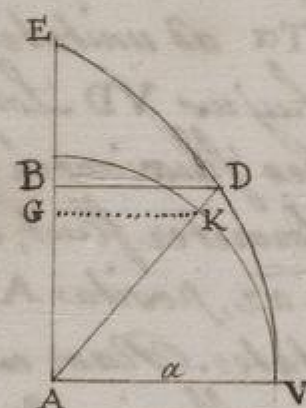
Exempl: 8.

Proponatur Hyperbola ad quam Æquatio est $\sqrt{aa+bzz}=y$, et inde (per Prob: 1.) elicietur $\dot{y}=\frac{bz}{y}$ seu $\frac{bz}{\sqrt{aa+bzz}}$. Cujus Quadrato adde 1 et Summæ radix erit $\sqrt{\frac{aa-bzz+bbzz}{aa+bzz}}=\dot{t}$. Hanc Fluxionem cum non reperiatur in Tabulis reduco in infinitam Seriem et primò per Divisionem evadit $\dot{t}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}z^2-\frac{b^3}{a^4}z^4+\frac{b^4}{a^6}z^6-\frac{b^5}{a^8}z^8}$ &c dein per extractionem radicis $\dot{t}=1+\frac{b^2}{2a^2}z^2-\frac{4b^3+b^4}{8a^4}z^4+\frac{8b^4+4b^5+b^6}{16a^6}z^6$ &c. Et hinc per Prob: 2. obtinebitur t seu Longitudo Hyperbolæ $=z+\frac{b^2}{6a^2}z^3-\frac{4b^3+b^4}{40a^4}z^5+\frac{8b^4+4b^5+b^6}{112a^6}z^7$ &c.

Quod si Ellipsis $\sqrt{aa-bzz}=y$, proponatur debet Signum ipsius b ubique mutari, & habebitur $z+\frac{b^2}{6a^2}z^3+\frac{4b^3-b^4}{40a^4}z^5+\frac{8b^4-4b^5-b^6}{112a^6}z^7$ &c. pro Longitudine ejus; et posita insuper unitate pro b, emerget $z+\frac{z^3}{6a^2}+\frac{3z^5}{40a^4}+\frac{5z^7}{112a^6}$ &c. pro Longitudine Circuli. Cujus Series Numerales Coefficientes in infinitum inveniuntur multiplicando continuo terminos hujus Progressionis, $\frac{1\times1}{2\times3}, \frac{3\times3}{4\times5}, \frac{5\times5}{6\times7}, \frac{7\times7}{8\times9}, \frac{9\times9}{10\times11}$ &c.

Exempl: 9.

Proponatur denique Quadratrix VDE cujus vertex est V, existente A Centro & AV Semidiametro Circuli interioris ad quam aptatur, atque Angulo VAE recto. Acta jam recta qualibet AKD secante Circulum istum in K, & Quadraticem in D demissisque ad AE normalibus KG, DB; dic AV a, AG z, VK x, et BD y; eritque ut in superiore Exemplo, $x=z+\frac{z^3}{6a^2}+\frac{3z^5}{40a^4}+\frac{5z^7}{112a^6}+$ &c. Extrahe radicem z et emerget $=x-\frac{x^3}{6a^2}+\frac{x^5}{120a^4}-\frac{x^7}{5040a^6}+$ &c. Cujus Quadratum aufer de $\overline{AK}^2$, & residui radix $a-\frac{x^2}{2a}+\frac{x^4}{24a^3}-\frac{x^6}{720a^5}+$ &c. erit GK. Jam cùm ex natura Quadraticis sit AB $=$ VK $= x$, sitque etiam AG : GK :: AB : BD (y), divide AB $\times$ GK per AG et orietur $y=a-\frac{xx}{3a}-\frac{x^4}{45a^3}-\frac{2x^6}{945a^5}$ &c. Et inde per Prob. 1. $\dot{y}=-\frac{2x}{3a}-\frac{4x^3}{45a^3}-\frac{4x^5}{315a^5}$ &c. Cujus Quadrato adde 1, et Summæ radix erit $1+\frac{2xx}{9aa}+\frac{14x^4}{405a^4}+\frac{604x^6}{127575a^6}$, &c. $=\dot{t}$, unde per Prob: 2. obtinebitur t seu Quadraticis Arcus VD $=x+\frac{2x^3}{27a^2}+\frac{14x^5}{2025a^4}+\frac{604x^5}{893025a^6}$ &c.



Finis.

